



THM

TECHNISCHE HOCHSCHULE MITTELHESSEN

**CAMPUS
GIESSEN**

ME

Maschinenbau
und Energietechnik

Technische Schwingungslehre

S. Kolling & H. Steinhilber



2. Auflage 2013

Skriptum zur Vorlesung

Herausgeber:

Institut für Mechanik und Materialforschung (IMM)
Wiesenstraße 14
35390 Gießen

Autoren:

Prof. Dr.-Ing. habil. Stefan Kolling
Prof. Dr. rer. nat. Helmut Steinhilber

Fachbereich Maschinenbau und Energietechnik
Technische Hochschule Mittelhessen

2. Auflage 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Mechanische Schwingungen	1
1.2	Nützliche und gefährliche Schwingungen	4
1.3	Schwingungen und Komfort	10
1.4	Grundbegriffe	12
1.5	Darstellung von Schwingungen	15
1.5.1	Verlauf von harmonischen Schwingungen	15
1.5.2	Zeigerdiagramm und Überlagerung zweier Schwingungen	15
1.5.3	Komplexe Darstellung	21
1.6	Aufstellen der Bewegungsgleichungen	23
2	Schwinger mit einem Freiheitsgrad	27
2.1	Freie ungedämpfte Schwingung	27
2.1.1	Modell und Bewegungsgleichung	27
2.1.2	Zur Lösung der Differentialgleichung	29
2.1.3	Schwerependel	31
2.1.4	Das mathematische Pendel	31
2.1.5	Das physikalische Pendel	32
2.1.6	Energieerhaltung	32
2.1.7	Phasendarstellung einer Schwingung	33
2.2	Federzahlen elastischer Systeme	40
2.3	Freie Schwingung des gedämpften Systems	40
2.3.1	Reibungsdämpfung	41
2.3.2	Lineare viskose Dämpfung	45
2.4	Harmonische Erregung	50
2.4.1	Krafterregung	50
2.4.1.1	Ungedämpftes System	50

2.4.1.2	Gedämpftes System	53
2.4.2	Unwuchterregung	58
2.4.3	Fußpunkterregung	61
2.4.4	Allgemein periodische Erregung	67
2.5	Stoßantwort	72
2.6	Beliebige Erregung	76
2.6.1	Numerische Integration	77
2.6.2	Lösung durch Fouriertransformation	77
3	Schwinger mit zwei und mehr gekoppelten Freiheitsgraden	81
3.1	Freie, ungedämpfte Schwingungen	82
3.2	Erzwungene Schwingungen des ungedämpften Systems	85
3.2.1	Periodische Erregung	85
3.2.2	Transiente Erregung	86
3.3	Schwach gedämpfte Systeme	88
4	Schwingungen kontinuierlicher Systeme	91
4.1	Längsschwingungen einer Feder	91
4.2	Biegeschwingungen	94
	Anhang: Kontrollfragen	98
	Literaturhinweise	103

1 Einführung

Inhalt

1.1	Mechanische Schwingungen	1
1.2	Nützliche und gefährliche Schwingungen	4
1.3	Schwingungen und Komfort	10
1.4	Grundbegriffe	12
1.5	Darstellung von Schwingungen	15
1.6	Aufstellen der Bewegungsgleichungen	23

1.1 Mechanische Schwingungen

Als Schwingungen werden Vorgänge bezeichnet, bei denen sich physikalische Größen mit der Zeit in einer Weise verändern, dass bestimmte Merkmale immer wiederkehren, häufig sogar periodisch, das heißt in regelmäßigen Zeitabständen.

Es sind damit alle Vorgänge gemeint, bei denen sich bestimmte Dinge zeitlich wiederholen. Von mechanischen Schwingungen spricht man, wenn es sich bei den physikalischen Größen z.B. um die Verschiebungen der Massenelemente eines mechanischen System handelt.

Jedes mechanische System, das eine stabile Gleichgewichtslage besitzt, ist ein schwingungsfähiges System. Die Gleichgewichtslage eines mechanischen Systems heißt stabil, wenn bei einer Störung des Gleichgewichts Kräfte geweckt werden, die das System in seine Gleichgewichtslage zurücktreiben, so genannte Rückstellkräfte. Wenn dieser Bewegungsvorgang sehr langsam (quasistatisch) erfolgt, spricht man von einem Kriechvorgang. Häufiger trifft jedoch der Fall auf, dass das System seine Gleichgewichtslage mit einer gewissen Geschwindigkeit erreicht.

Dann kann, wegen des Beharrungsvermögens der trägen Masse des Systems, die Gleichgewichtslage nicht sofort wieder eingenommen werden, sondern das System bewegt sich darüber hinaus weiter. Die Rückstellkräfte ändern ihre Wirkrichtung, um das System erneut in die Gleichgewichtslage zu bringen. Das System kommt in einer ausgelenkten Lage momentan zur Ruhe, um sich dann wieder zur Gleichgewichtslage hin zu bewegen, die das nächste Mal mit einer anders gerichteten Geschwindigkeit passiert wird. Dieser Vorgang wiederholt sich dann periodisch. Ein typisches Beispiel, des eben beschriebenen ist das Pendel, dessen Bewegung in Bild 1.1 schematisch dargestellt ist.

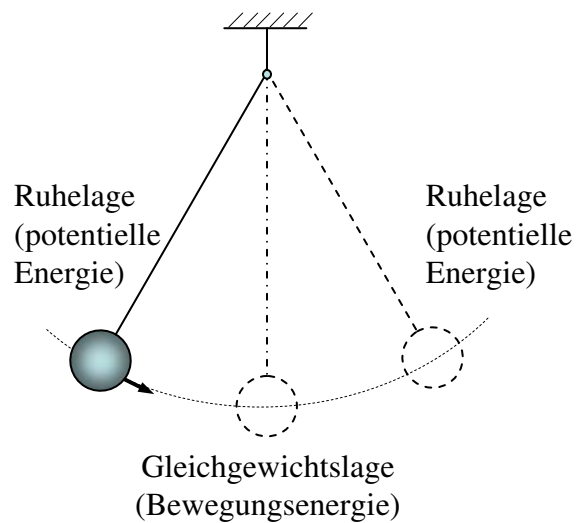


Bild 1.1: Pendelbewegung

Bei einer solchen Schwingung eines mechanischen Systems um seine Gleichgewichtslage findet ein ständiger Austausch zwischen Bewegungsenergie (kinetischer Energie) des Systems beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage und potentieller Energie (elastischer Energie oder Lageenergie) des Systems in der Umkehrlage (in der das System momentan in Ruhe ist) statt.

Bei realen Systemen erfolgt dieser Energieaustausch nicht verlustfrei. Vielmehr wird ständig ein Teil der Schwingungsenergie in andere Energieformen (z.B. Wärmeenergie) umgewandelt oder an die Umgebung in Form von elastomechanischen Wellen abgegeben (Luftschall, Körperschall). Dadurch nimmt die Schwingungsenergie des Systems und damit auch die Geschwindigkeit, mit der das System die Gleichgewichtslage passiert, beständig ab, falls es sich um freie Schwingungen handelt, bei denen nur während der Anfangsstörung eine Energiezufuhr erfolgt. Die Schwingungsausschläge, d.h. die Abstände zwischen der Gleichgewichtslage und der Umkehrlage der Massenelemente, werden von Schwingungszyklus zu Schwingungszyklus immer kleiner, und irgendwann nimmt das System die Gleichgewichtslage wieder ein.

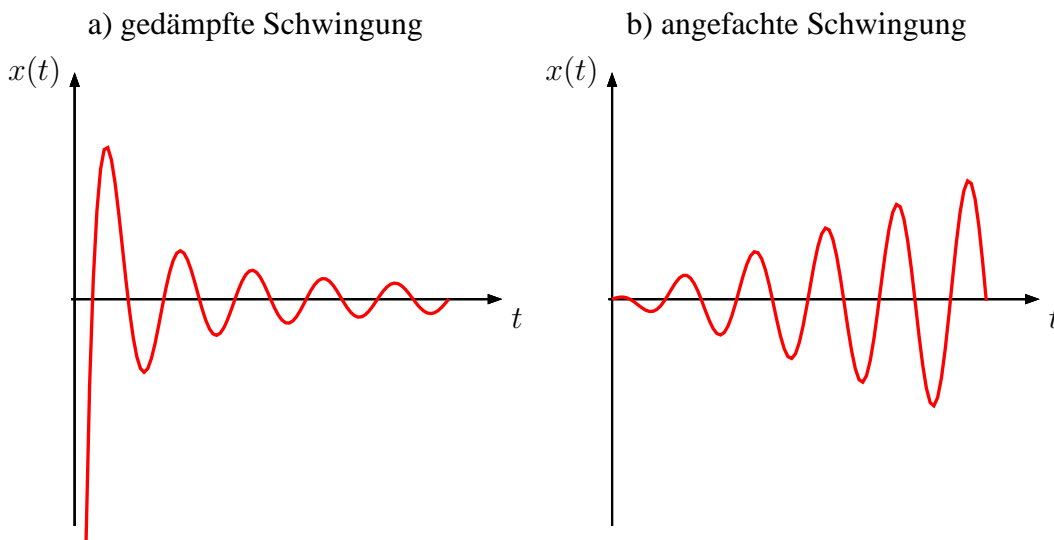


Bild 1.2: Gedämpfte und angefachte Schwingung

Diese Abnahme der Schwingungsenergie einer freien Schwingung, diese Energiedissipation¹, wird als Schwingungsdämpfung bezeichnet, siehe Bild 1.2a. Im umgekehrten Falle, wenn Energie dem System zur Anregung der Schwingung zur Verfügung gestellt wird, spricht man von „angefachten Schwingungen“, siehe Bild 1.2b.

Die stabile Gleichgewichtslage muss nicht unbedingt eine statische Ruhelage des betreffenden Systems sein. Vielmehr kann es sich auch um eine stationäre Bewegung mit einem ausgeglichenen Kräfte- bzw. Momentenhaushalt handeln.

Zum Beispiel kann ein Turbinenläufer, der im stationären Betrieb mit konstanter Drehzahl rotiert, Torsionsschwingungen oder Biegeschwingungen relativ zu dieser gleichsinnigen Bewegung ausführen, die durch Dichteschwankungen des Mediums, durch Ungleichförmigkeiten des Antriebs oder durch eine Unwucht des Läufers selbst verursacht werden. Diese Schwingungen sind unerwünscht und werden deshalb als Störschwingungen bezeichnet. Diese können für die Konstruktion durchaus gefährlich werden, zumindest ihre Funktion beeinträchtigen. Wir

¹Der Begriff Dissipation stammt vom russischen Nobelpreisträger für Chemie Ilja Prigogine (1917-2003), der sich mit dissipativen Strukturen, Selbstorganisation und Irreversibilität befasste. Unter Dissipation wird dabei die Untersuchung von Strukturen verstanden, die sich nicht im thermodynamischen Gleichgewicht befinden, oder nach Prigogine „die paradoxe enge Verbindung, die zwischen Struktur und Ordnung einerseits und Dissipation und Unordnung andererseits bestehen kann“. Mit dissipieren ist somit das Gegenteil von strukturieren gemeint und bedeutet also so viel wie „verteilen“ oder im energetischen Sinne „umwandeln“.



Ilja Prigogine (1917-2003)

werden im nächsten Abschnitt hierzu noch ein paar Beispiele kennen lernen.

In der *Technischen Schwingungslehre* werden wir uns mit den Grundlagen dieser Phänomene befassen. Die technischen Anwendungen hierzu werden dann in den entsprechenden Vertiefungsfächern vermittelt. Die folgende kleine Übersicht gibt einen Einblick in die Teilgebiete, in denen mechanischen Schwingungen eine entscheidende Rolle spielen.

Maschinendynamik Die Maschinendynamik untersucht die Wechselwirkung zwischen Kräften und Bewegungen in Maschinen und deren Bauteilen. Insbesondere werden deren Schwingungsverhalten analysiert und kritische Frequenzen für den Betrieb berechnet.

Rotordynamik Ein Rotor (lat. rotare: kreisen), im Gegensatz zum Stator, ist der sich drehende (rotierende) Teil einer Maschine. Beispiele hierfür sind Elektromotoren, Gasturbinen, Pumpen oder Verdichter. Die Rotordynamik ist ein Teilgebiet der Maschinendynamik und untersucht die Wechselwirkung zwischen Kräften und Bewegungen in Rotoren. Hauptanwendungen sind hierbei Biege- und Torsionsschwingungen von Wellen, wobei das Berechnen so genannter kritischer Drehzahlen eine wesentliche Rolle spielt.

Baudynamik Die Baudynamik, im Gegensatz zur Baustatik, befasst sich mit der Berechnung und Beurteilung dynamisch belasteter Bauwerke. Solche Belastungen entstehen beispielsweise durch Winderregung, Erdbeben oder durch stoßartige Lasten infolge eines Anpralls. Ebenfalls wird die generelle Schwingungsanfälligkeit eines (schlanken) Bauwerks untersucht.

1.2 Nützliche und gefährliche Schwingungen

In der Praxis gibt es sowohl Fälle, in denen die Schwingungen erwünscht sind, weil sie zur Funktion eines Systems notwendig sind, als auch Fälle, in denen die Schwingungen eines Systems als störend empfunden werden, weil sie die Funktion des Systems beeinträchtigen, oder weil sie, durch die damit verbundene Beanspruchung der Bauteile (die sogenannte Schwingbeanspruchung), die Lebensdauer der Konstruktion mindern.

Schwingungen sind aber nicht immer unerwünscht. So wären beispielsweise Schwingförderer, Schwingschleifer, Uhren oder elektrische Zahnbürsten ohne Schwingungen ziemlich nutzlos.

Im Bauwesen werden zum Beispiel Schwingungen im Massivbau gezielt eingesetzt, und zwar um den Frischbeton zu verdichten. Nachdem der fließende Beton einmal in seiner für ihn vorgesehenen Schalung gelandet ist, kommen hierfür zwei auf Schwingungen basierende Maschi-

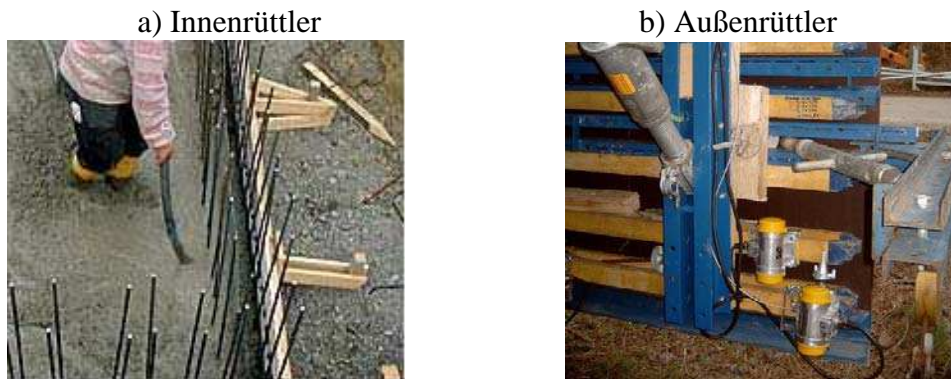


Bild 1.3: Rüttler im Baustelleneinsatz

nen zum Einsatz, um eingeschlossene Luft aus dem Beton zu treiben: so genannte Innen- und Außenrüttler. Innenrüttler sind Verdichtungsgeräte nach DIN 4235 Teil 2. Vereinfacht besteht ein solcher Rüttler aus einem Antriebsmotor und der flexiblen Antriebswelle unterschiedlicher Länge, an deren Ende die Rüttelflasche angebracht ist. In dieser befindet sich eine Schwungmasse, die die Rüttelflasche in eine mechanische Schwingung versetzt, Bild 1.3a.

Wird die Rüttelflasche in den Frischbeton eingetaucht, so werden die Schwingungen auf den Frischbeton übertragen. Innenrüttler sind die für den Baustelleneinsatz gängigen Verdichtungsgeräte. Beim Außenrüttler werden hingegen die mechanischen Schwingungen des Rüttlers, der an der Außenseite der Betonschalung befestigt ist, über die Schalung in den Beton übertragen (Bild 1.3b). Außenrüttler werden vor allem bei der Herstellung von Betonfertigteilen verwendet.

Soweit zu der Tatsache, dass Schwingungen durchaus erwünscht und nützlich sein können. Der Fall, dass die Schwingungen unerwünscht sind, kommt in der Praxis zum Leidwesen der Ingenieure allerdings weit häufiger vor. Eines der bekanntesten Beispiele hierzu liefert die bei Tacoma im US-Bundesstaat Washington über dem Puget Sound führende Hängebrücke, die am 1. Juli 1940 eröffnete wurde, um am 7. November 1940 wieder einzustürzen. Das schlanke und leichte Bauwerk war sehr anfällig gegenüber Schwingungen infolge Windbelastungen.

Wird das Bauwerk seitlich angeströmt, so kommt es zu Wirbelablösungen, die die Konstruktion in Schwingung versetzen können. Dies

von dem ungarisch-deutsch-amerikanischen Ingenieur Theodore von Kármán (1881-1963) im Jahre 1912 entdeckte Phänomen wurde 28 Jahre später auch den Bauingenieuren schlagartig



Theodore von Kármán
(1881-1963)



Bild 1.4: Schwingungserregung und Einsturz der Tacoma Narrows Bridge

klar. Denn leider hatte die durch einen sogar eher mäßigen Wind verursachten Wirbel eine Eigenfrequenz der Brücke genau getroffen. Diese Übereinstimmung der Frequenzen von äußerer Erregung und der Eigenfrequenz, eine Systemeigenschaft der Konstruktion, führte zu einer so genannten Resonanz. Damit wuchsen die anfänglich kleinen Schwingungsausschläge mit der Zeit immer stärker an, bis das ganze Tragwerk schließlich einstürzte. Im Abschlussbericht zur Untersuchung der Katastrophe heißt es: *„Es wurde nicht erkannt, dass die aerodynamischen Kräfte, die sich in der Vergangenheit schon bei viel leichteren und kürzeren flexiblen Hängebrücken als verhängnisvoll erwiesen hatten, auch auf einen so großen Bau wie die Tacoma Narrows Bridge Einfluss haben könnten.“*

Wie bei vielen solcher Ereignisse sind diese sowohl tragisch als auch lehrreich für die Wissenschaft und für die Konstruktion zukünftiger Brücken. Mit modernen Berechnungsverfahren und computergestützten Simulationen sind solche Katastrophen heute vermeidbar.

Ein ähnlicher Effekt, der auf sich periodisch ablösende Wirbel beruht, stellt das so genannte Flattern einer Flugzeugtragfläche dar, bei dem der Wind ebenfalls gleichförmig angeströmt wird. Die Untersuchungen einer Flugzeugkonstruktion bezüglich des Flatterns spielen eine entscheidende Rolle beim Bau von Flugzeugen. Die Gesamtheit der sich ablösenden Wirbel wird nach ihrem Entdecker auch Kármánsche Wirbelstraße (engl.: Kármán Vortex Street) genannt. Bild 1.5² zeigt eine Visualisierung dieser Wirbelstraße in einer Seifenhaut, in die ein runder Glasstab als Hindernis eingeführt wurde. Ähnliche Experimente lassen sich auch im Windkanal mit gefärbtem Rauch zeigen.



Bild 1.5: Kármánsche Wirbelstraße

²aus M. A. Rutgers, X-l. Wu, and W. I. Goldburg. „The Onset of 2-D Grid Generated Turbulence in Flowing Soap Films“, Phys. Fluids 8, S7 (Sep. 1996).

Ein weiteres Beispiel, bei dem die Schwingung eines Systems gefährlich werden kann ist die durch sie hervorgerufene zyklische Beanspruchung eines Bauteils: die sogenannte Schwingbeanspruchung, die die Lebensdauer der Konstruktion mindern kann. Dieser Effekt tritt auf, da der Werkstoff sich unter einer schwingenden (zyklischen) Beanspruchung anders verhält als unter quasistatischer Belastung. Das kann der Leser sehr schnell in einem kleinen Experiment nachvollziehen. Alles was man dazu braucht ist eine handelsübliche Büroklammer oder ein Stück Draht. Wenn man den Draht brechen will, so gelingt das nicht durch einfaches Biegen. Es gelingt jedoch sehr leicht, in dem man den Draht sehr oft hin und her biegt (also zyklisch belastet). Nach bereits wenigen Zyklen ist das Material „müde“ geworden und der Draht bricht durch, man spricht von einem Ermüdungsbruch.

Gerade aber diese dynamische (schwingende) Beanspruchung stellt bei Bauteilen von Maschinen die häufigste Belastungsart dar. Die Zahl der Lastwechsel (Zyklen von Be- und Entlastung) ist in vielen Fällen sehr groß, was zu der eben erwähnten Materialermüdung führt. Hierzu unterscheidet man drei idealisierte Grundtypen von Beanspruchungsabläufen (Bild 1.6):

- I) die **ruhende Beanspruchung**, wenn eine zügige Belastung auf einen Höchstwert erfolgt, der dann konstant bleibt,
- II) die **schwellende Beanspruchung**, wenn die Belastung wiederholt von null auf den Höchstwert und wieder auf null erfolgt (zyklisch),
- III) die **wechselnde Beanspruchung**, bei der die Belastung zwischen gleich großen positiven und negativen Höchstwerten wechselt.

Die ertragbare Spannung bei schwellender Beanspruchung, die so genannte **Schwellfestigkeit** σ_{zsch} , ist natürlich deutlich geringer als die Zugfestigkeit die bei ruhender Beanspruchung er-

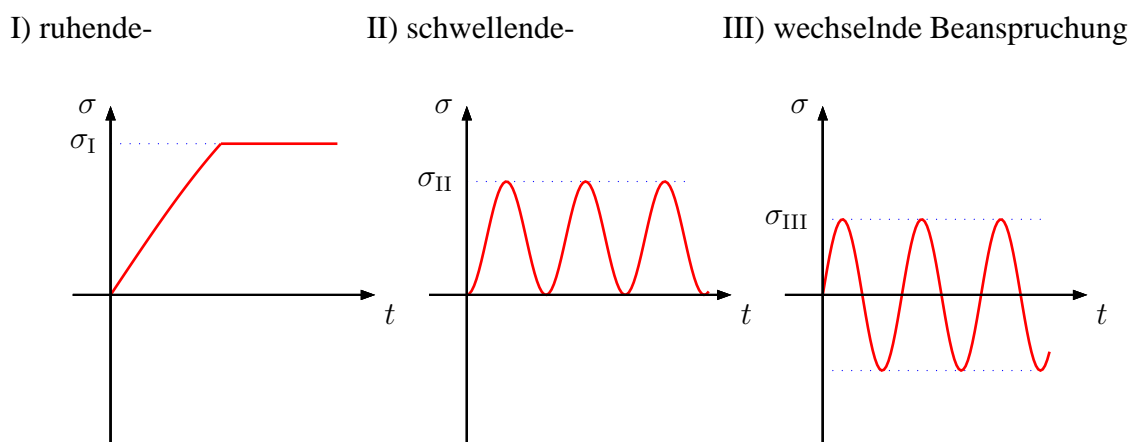


Bild 1.6: Idealisierte Grundtypen von Beanspruchungsabläufen

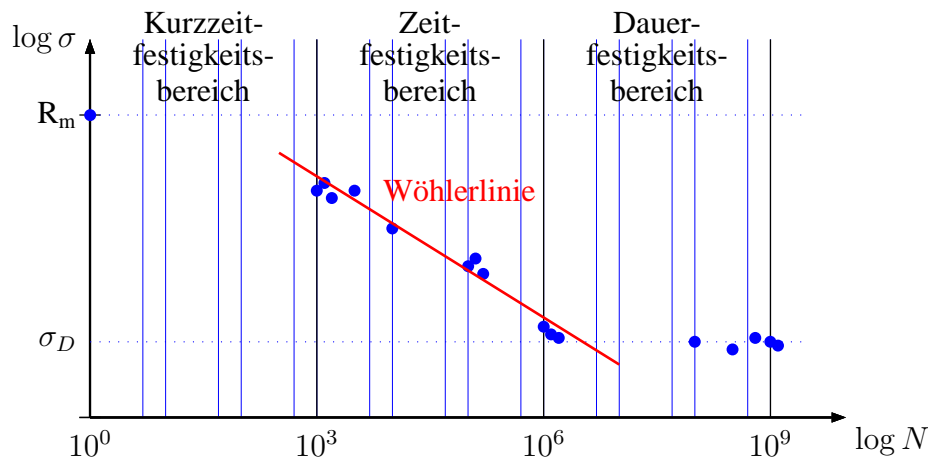
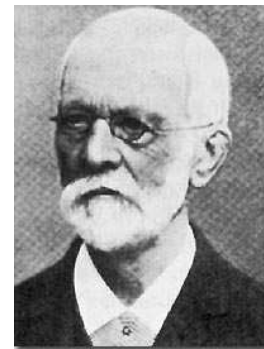


Bild 1.7: Darstellung der Wöhlerversuche

mittelt wird. Die ertragbare Spannung bei Wechselbeanspruchung, die **Wechselfestigkeit** σ_{zdw} , ist nochmals geringer als die Schwellfestigkeit.

Schwellende oder wechselnde Beanspruchungen von Proben und Bauteilen lassen sich mit relativ einfachen Prüfmaschinen realisieren. Derartige Schwingfestigkeitsversuche nennt man Einstufenversuche (constant amplitude tests) oder **Wöhlerversuche**, nach dem deutschen Ingenieur August Wöhler, der 1863 erstmals solche Versuche beschrieb, die er an Achsen von Eisenbahnwaggons durchgeführt hatte.

Wöhlerversuche werden stets mit mehreren Prüfteilen und mit unterschiedlicher Beanspruchungshöhe durchgeführt. Zur Auswertung werden die Bruchlastspielzahlen beim jeweiligen „Spannungshorizont“ aufgetragen. Im doppelt-logarithmischen Maßstab lassen sich die Mittelwerte der Versuchsergebnisse bei den höheren Beanspruchungen, im so genannten **Zeitfestigkeitsbereich**, durch eine Gerade, die **Wöhlerlinie**, näherungsweise beschreiben, Bild 1.7. Die Wöhlerlinie gibt im Zeitfestigkeitsbereich die mittlere ertragbare Lastspielzahl für einen bestimmten Spannungswert an.



August Wöhler
(1819-1914)

Die Lastspielzahlen im Zeitfestigkeitsbereich liegen zwischen 10^3 und $10^6 - 10^7$. Unterhalb dieses Lastspielzahlbereiches spricht man von **Kurzzeitfestigkeit**. Die Kurve, die die Versuchsergebnisse annähert, verläuft in diesem Bereich flacher als die Wöhlerlinie und endet bei der Lastspielzahl 1 beim Wert der Zugfestigkeit R_m .

Bei Bruchlastspielzahlen oberhalb von 10^6 bis 10^7 lassen sich die Ergebnisse durch eine ho-

horizontale Gerade annähern. Man spricht vom **Dauerfestigkeitsbereich**. Der zugehörige Spannungswert ist die Schwellfestigkeit bzw. die Wechselfestigkeit des Werkstoffs.

Wöhlerversuche werden nicht nur bei schwellender Beanspruchung (Mittelspannung = halber Spannungshöchstwert) oder wechselnder (Mittelspannung = 0), sondern auch bei anderen Mittelspannungen gefahren.

Die **realen Beanspruchungsabläufe** in Bauteilen beim Betrieb einer Konstruktion unterscheiden sich von den idealisierten Grundtypen dadurch, dass die Spannungsamplituden nicht konstant sind, sondern sich von Lastspiel zu Lastspiel ändern, in der Regel sogar zufallsartig. Dies erfordert dann weitergehende Betrachtungen, mit denen sich die Betriebsfestigkeitslehre beschäftigt.

Die Auswirkungen solcher Lastspielzyklen können in der Praxis katastrophale Folgen haben. Man denke hier an einen Ermüdungsbruch von Turbinenschaukeln bei Flugzeugturbinen oder von PKW-Achsen. Bild 1.8 zeigt den Schwingbruch im Zahnfuß der Antriebshalbwelle eines Sportwagens³. Auch der Bruch der Tacoma Bridge ist letztendlich auf ein Ermüden der Tragstruktur infolge der enormen Schwingbeanspruchung zurückzuführen. Die Brücke schwingte vor dem Versagen noch eine geraume Zeit mit großen Amplituden.

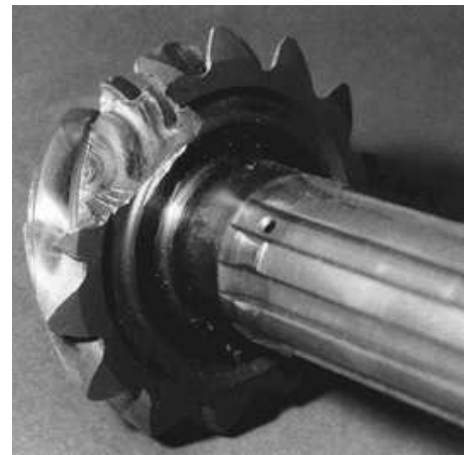


Bild 1.8: Schwingbruch

Zu den bekanntesten Schadensfällen gehörten in diesem Zusammenhang die Liberty-Schiffe. Hierbei sind zwischen 1943 und 1946 etliche solcher Frachter schlichtweg in zwei Teile zerbrochen. Grund hierfür waren die zyklischen Belastungen infolge des Seegangs, welchem die Schiffe ausgesetzt waren. Die damals verwendete Schweißtechnik steckte noch in den Kinderschuhen (vorher wurden Schiffe genietet). In kalten Gewässern wurden die Schweißnähte spröde und so zerbrachen die Schiffe ohne jegliche Vorankündigung. Ein weiteres Problem war der hohe Stickstoffgehalt des verwendeten Stahl, der die Neigung zu Sprödbriichen förderte. Innerhalb von zehn Jahren sanken etwa hundert Schiffe. Erst die Weiterentwicklung der Schweißtechnik und die Herstellung schweißbarer Stähle mit hoher Festigkeit und Duktilität verhinderte solche Katastrophen.

³Quelle: Institut für Werkstoffanwendungen im Maschinenbau, RWTH Aachen

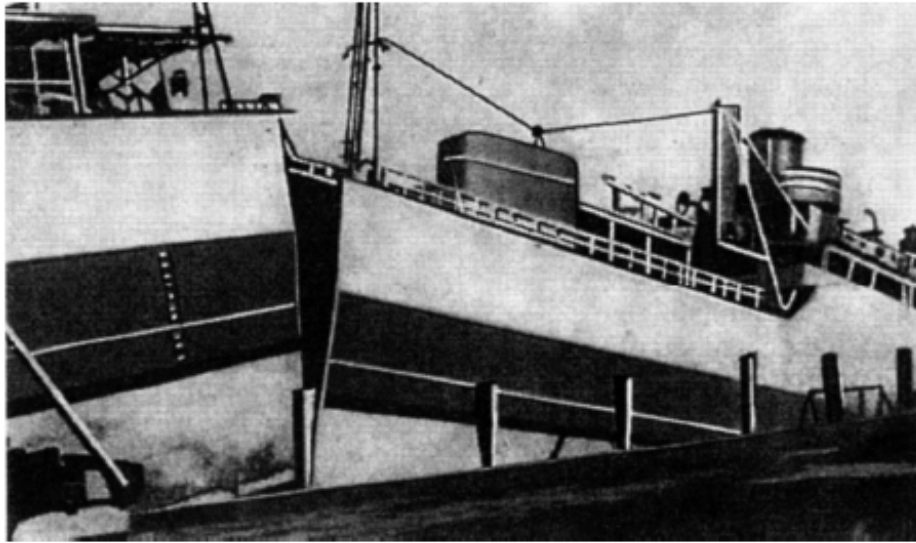


Bild 1.9: Sprödbruch eines Liberty-Schiffes

1.3 Schwingungen und Komfort

Als Ingenieure haben wir nicht nur die Verantwortung Konstruktionen zu entwickeln die sicher sind, sie sollen auch wirtschaftlich und vor allem dem Kunden dienlich sein. Denken wir an Transportmittel wie Flugzeuge, Schiffe, Automobile und die Bahn, so leuchtet sofort ein, dass die Passagiere nicht nur sicher, sondern auch möglichst komfortabel von A nach B kommen wollen.

Hierbei sind Schwingungen in einem weiten Frequenzspektrum möglich und jede Frequenz hat dabei seine eigene Auswirkung auf das Wohlbefinden des Menschen. Nehmen wir ein recht einfaches, lediglich als störend empfundenen Beispiel: das „zittern“ des Lenkrads oder des Rückspiegels im Automobil. Beides muss bei der Konstruktion eines Automobils konsequent vermieden werden, denn der Kunde soll den Verkehr und nicht das Schwingverhalten seines Lenkrads beobachten. Beim Rückspiegelzittern kommt noch hinzu, dass ein klares Spiegelbild dabei nicht mehr möglich ist. Solche Störungen möchte der zahlende Kunde schlichtweg nicht haben und sie sind umso ärgerlicher für ihn, je mehr er für sein Auto bezahlen musste.



Bild 1.10: Motorlager

Daher wird gerade im Automobilbau sehr viel Wert auf eine schwingungstechnisch optimal ausgelegte Fahrzeugstruktur gelegt: so werden Motoren auf dämpfende Lager gestellt (Bild 1.10)

zeigt einen Schnitt) oder Getriebe- und Antriebswellen sowie Lenkungsgestänge mittels Gelenkscheiben (Hardy-Scheiben, Bild 1.11) unterbrochen, um das Übertragen von Schwingungen zu vermeiden.

Betrachten wir nun die Sache etwas allgemeiner: Viele Menschen vertragen nämlich das Reisen nicht. Bei und Schiffen ist das Phänomen „Seekrankheit“ weit verbreitet. Ursache sind auch hier Schwingungen, die ein Schiff oder ein Flugzeug unweigerlich durchführt. Die erste Klasse befindet sich dabei immer dort, wo solche Schwingungen zum Einen weniger spürbar und zum Anderen weniger hörbar sind. Der Schall kann, wie wir nun wissen, ebenfalls als Schwingung aufgefasst werden und stellt ein weiteres wichtiges Komfortkriterium dar.



Bild 1.11: Hardy-Scheibe

In Tabelle 1.1 aus [4] sind die Einwirkungen von Schwingungen auf das Wohlbefinden des Menschen dargestellt. Natürlich sind diese Werte reine Richtwerte, denn das Empfinden ist sehr subjektiv und hängt zudem noch von der Umgebung, also von der Luft und dem Wetter ab. So wirken sich in manchen Autos und in Zügen der Geruch von Velours oder gut gemeinten Duftbäumchen auf bestimmte Personen noch weiter negativ aus und einer grünen Gesichtsfarbe während der Fahrt steht nichts mehr im Weg.

Gerade beim Fliegen werden die Passagiere mit einem breiten Spektrum an Schwingungsfrequenzen konfrontiert: Die Triebwerke (60-40.000Hz), die Luftgeräusche (150-40.000Hz), die Turbulenzen und Böen (0-5Hz) sowie die Verformung der Flugzeugstruktur (1-40Hz) bieten dem Fluggast gute Gelegenheit für eine ordentliche Portion Reiseübelkeit.

Schall	Schwindelgefühl	20-10000Hz
	Verständnisschwierigkeiten	100-8.000Hz
	Gehörschäden	1.000-10.000Hz
Schwingungen	Tast-Empfindungen	0.1-100000Hz
	Schwindel und Unsicherheit	0,1-100Hz
	Seekrankheit	0,3-1Hz
	Atemnot, Leibschmerzen	5-12Hz
	Sehstörungen	1-100Hz
	Hitzegefühl und Zellschäden	>10.000Hz

Tabelle 1.1: Einwirkungen von Schwingungen auf das Wohlbefinden

Die hier aufgezeigten Fakten zum Thema Schwingungskomfort sind keineswegs akademischer Natur. Sie werden bei der Entwicklung bereits ab der Konzeptphase von Fahrzeugprojekten akribisch beachtet. Hierbei ist die Beurteilung des Zusammenspiels der Komponenten Karosserie, Fahrwerk und Antrieb bezüglich ihrer schwingungstechnischen und akustischen Konzepte von großer Bedeutung. Auch hier spielen moderne Berechnungsverfahren und Simulationen eine große Rolle. In dem vorliegenden Kurs werden wir nun die Grundlagen für das Verständnis schwingungstechnischer Probleme legen, die es dem Studenten erlauben, sich in weiterführende, insbesondere numerische Verfahren wie der Mehrkörpersimulation (MKS) oder der Finite Elemente Methode (FEM) einzuarbeiten zu können.

1.4 Grundbegriffe

Die wichtigsten Begriffe der Schwingungstechnik haben wir eigentlich alle bereits anhand der gezeigten Beispiele kennen gelernt: Wir sprachen von Periode, Frequenz, Amplituden oder von Dämpfung und wussten aufgrund unserer Schulbildung auch gleich was gemeint war. Wir wollen diese Begriffe im Folgenden aber etwas systematischer Zusammenstellen und so langsam, nahezu homöopathisch zu den eigentlichen mathematischen Beschreibungen von Schwingungsvorgängen kommen.

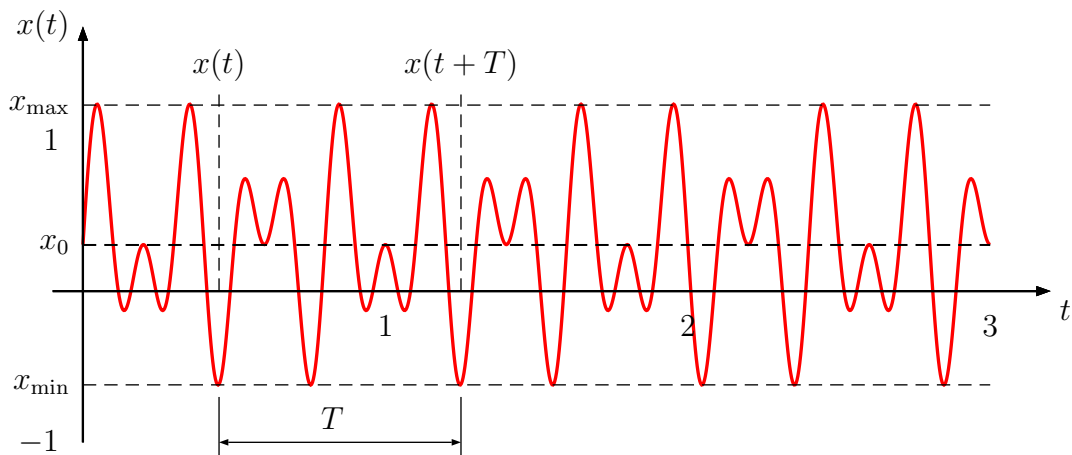


Bild 1.12: Periodische Schwingung

Wir betrachten eine zeitlich veränderliche physikalische Größe $x = x(t)$. Wenn diese Funktion nun periodisch ist, gibt es zu einer beliebigen Stelle t eine Stelle $t + T$, bei der sich der entsprechende Funktionswert wiederholt, also wenn gilt

$$x(t) = x(t + T) .$$

Die Zeit T wird hierbei als die Periode oder als die Schwingdauer des Systems bezeichnet. Diese Periodizität des Systems treffen wir immer wieder, das heißt wir können auch etwas allgemeiner schreiben

$$x(t) = x(t + nT) \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

Das ist doch schon mal ein schönes Ergebnis und daher wollen wir das soeben festgestellte auch in einer Definition festhalten.

Definition 1.1: Eine Schwingung $x(t)$ heißt periodisch, wenn sich zu einem beliebigen Zeitpunkt t und einem $t + nT$ ($n = 1, 2, \dots$) die Bedingung

$$x(t) = x(t + nT) \quad \text{für } n = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

erfüllt ist, wobei die Zeit T als die Periode der Schwingung bezeichnet wird.

In Bild 1.12 ist eine solche periodische Schwingung dargestellt. Die Schwingdauer kann hier ganz einfach abgelesen werden: man merkt sich eine beliebige aber signifikante Stelle (z.B. ein Minimum oder Maximum) und schaut sich dann die Stelle an, bei der sich der Funktionsverlauf wiederholt. Der Abstand zwischen diesen beiden Stellen ist dann die Periode T .

Ein übliches Maß für die Charakterisierung des Schwingverhaltens ist die Anzahl der Perioden innerhalb einer Sekunde. Dies wird als Frequenz f der Schwingung bezeichnet und berechnet sich aus dem Kehrwert der Schwingdauer T :

$$f = \frac{1}{T}.$$

Die Dimension der Frequenz wurde 1935 nach dem deutschen Physiker Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) benannt und mit „Hz“ abgekürzt:

$$1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1} = 1/\text{s}.$$



Heinrich Rudolf Hertz
(1857-1894)

Neben der Frequenz f definiert man noch die so genannte **Kreisfrequenz** ω als Anzahl der Schwingungen in 2π Sekunden:

$$\omega := 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

Definition 1.2: Der Kehrwert der Periode T einer gemäß Definition 1.1 periodischen Schwingung wird als ihre Frequenz f bezeichnet:

$$f = \frac{1}{T} \quad [\text{Hz}=1/\text{s}], \quad (1.2)$$

ihr 2π -faches ist die Kreisfrequenz ω :

$$\omega := 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad [2\pi/\text{s}]. \quad (1.3)$$

Ein weiteres markantes Merkmal dieses funktionalen Verlaufs sind seine maximalen und minimalen Ausschläge, also die Werte x_{\max} und x_{\min} . Diese kann man aus dem Funktionsverlauf in Bild 1.12 einfach abmessen. Hieraus lassen sich dann die Amplitude A der Schwingung zu

$$A = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}$$

sowie der Mittelwert x_0

$$x_0 = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2},$$

die so genannte Gleichgewichtslage, berechnen, um welche die Schwingung stattfindet. Die Amplitude beschreibt somit den maximalen Ausschlag der Schwingung gemessen von der Gleichgewichtslage aus.

Definition 1.3: Sind $x_{\max} = \max_{t \in \mathbb{R}}[x(t)]$ und die maximalen und $x_{\min} = \min_{t \in \mathbb{R}}[x(t)]$ die minimalen Werte einer periodischen Funktion $x(t)$ nach (1.1), so bezeichnen

$$A = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2} \quad (1.4)$$

die Amplitude und

$$x_0 = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}, \quad (1.5)$$

den Mittelwert der Schwingung.

1.5 Darstellung von Schwingungen

1.5.1 Verlauf von harmonischen Schwingungen

Ein wichtiger Sonderfall der periodischen Schwingung ist die **harmonische Schwingung**, bei der sich $x(t)$ rein sinus- oder kosinusförmig ändert:

$$x(t) = A_1 \sin \omega t \quad \text{bzw.} \quad x(t) = A_2 \cos \omega t \quad (1.6)$$

Darin sind $A_{1,2}$ die Amplituden nach (1.4) und ω die Kreisfrequenz nach (1.3). Die Verläufe der beiden Funktionen sind in Bild 1.13 dargestellt, wobei die Amplitude A_2 der Kosinusschwingung doppelt so groß gewählt wurde wie die Amplitude A_1 der Sinusschwingung. Die Periodizität ist in beiden Fällen gleich, nämlich $T = 2\pi/\omega$.

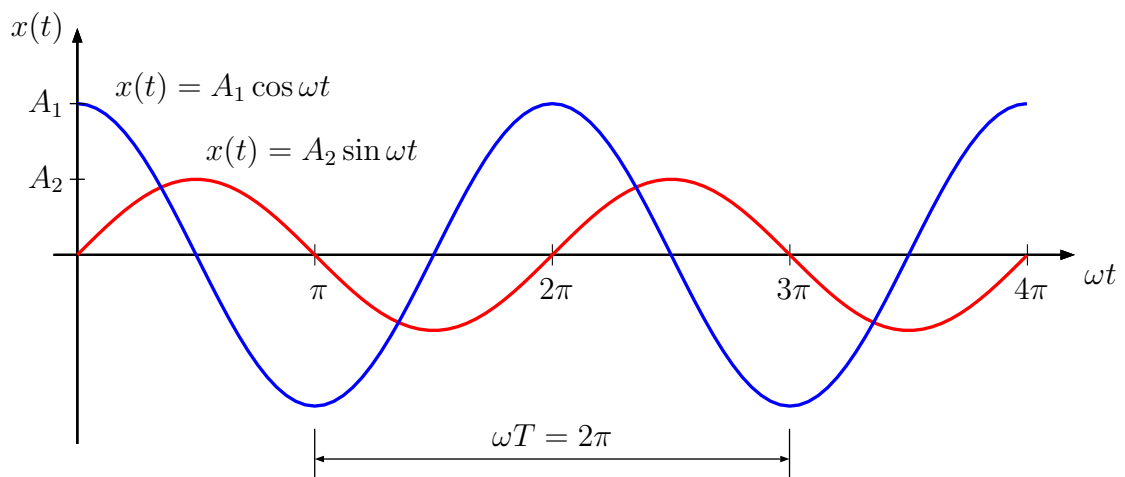


Bild 1.13: Harmonische Schwingung als Sonderfall der periodischen Schwingung

1.5.2 Zeigerdiagramm und Überlagerung zweier Schwingungen

Eine harmonische Schwingung kann erzeugt werden, indem man einen Punkt auf einer rotierenden Scheibe betrachtet. Nehmen wir hierfür eine Scheibe vom Radius 1 (Einheitskreis), welche mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert und betrachten einen Punkt auf dem Rand der Scheibe. Zur Orientierung legen wir ein Achsenkreuz in die Scheibenmitte, Bild 1.14.

Die Ausgangslage des Punktes bezeichnen wir mit P . Nun lassen wir die Scheibe rotieren, wobei sich der Punkt in die Lage P' bewegt. Der hierbei zurückgelegte Winkel beträgt ωt . Der vertikale Abstand zur horizontalen Achse beträgt dann $\sin \omega t$ und der horizontale Abstand zur vertikalen Achse $\cos \omega t$. Wenn wir den vertikale Abstand über den Winkel ωt auftragen,

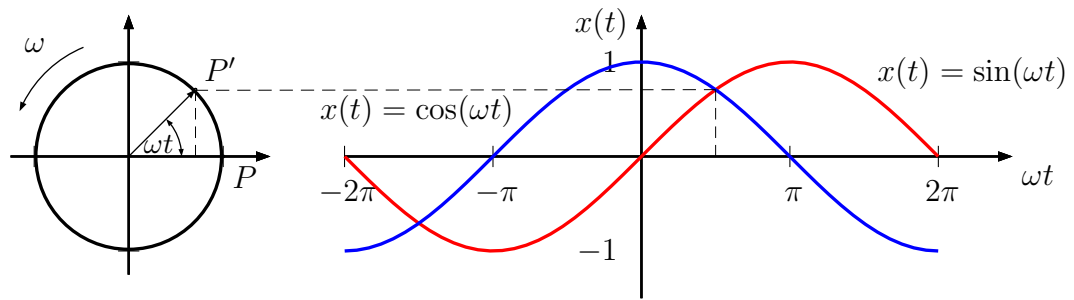


Bild 1.14: Darstellung einer Schwingung im Zeigerdiagramm

erhalten wir somit eine reine Sinusschwingung

$$x(t) = \sin \omega t .$$

Das Abtragen des horizontalen Abstands über den Winkel erzeugt eine reine Kosinusschwingung

$$x(t) = \cos \omega t .$$

Die zeitlichen Änderungen der horizontalen bzw. vertikalen Abstände des Punktes P beschreiben somit harmonische Schwingungen. Die Darstellung des Ortsvektors (Zeiger) von P auf der zugehörigen Kreisbahn bezeichnet man als *Vektorbild* oder *Zeigerdiagramm*.

Eine harmonische Schwingungen kann als zeitliche Änderungen der horizontalen bzw. vertikalen Abstände eines Punktes auf einer Kreisbahn aufgefasst werden. Die Darstellung des Punktes mit seinem Ortsvektor wird *Vektorbild* oder *Zeigerdiagramm* genannt.

Die Schwingamplituden haben dabei jeweils den Wert 1. Nehmen wir statt des Einheitskreises eine Scheibe mit einem Radius A , so erzeugen wir harmonische Schwingungen mit der Amplitude A :

$$x(t) = A \sin \omega t \quad \text{und} \quad x(t) = A \cos \omega t .$$

Wenn wir darüberhinaus noch die Ausgangslage des Punktes P um den Azimutwinkel φ verschieben, Bild 1.15, so erzeugen wir eine **Phasenverschiebung** der Schwingung in positive t -Richtung. Im Falle der Kosinusschwingung also eine Schwingung der Form:

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi) \quad \text{mit} \quad \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}] .$$

Hierbei wird der Winkel φ aus Nullphasenwinkel genannt. Er gibt die Stelle an, bei der die Schwingung erstmals ihren Maximalwert erreicht. Eine harmonische Schwingung lässt sich

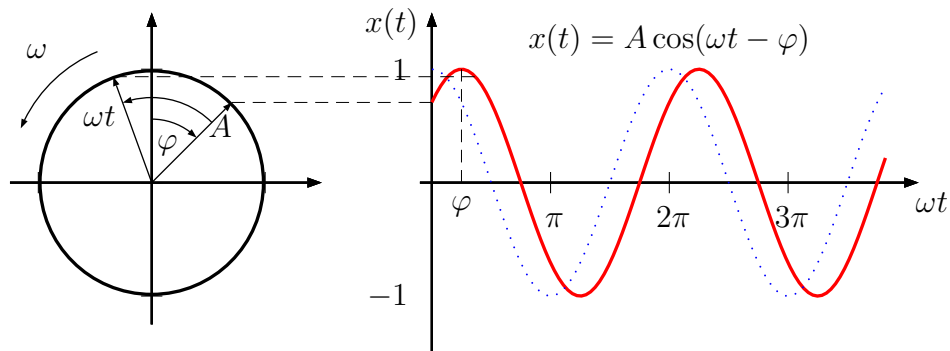


Bild 1.15: Darstellung der phasenverschobenen Kosinusschwingung im Zeigerdiagramm

ganz allgemein immer in dieser Form angeben. Bei einer Sinusschwingung tritt das erste Maximum allerdings dann auf, wenn der Funktionsverlauf in negative t -Richtung verschoben wird, Bild 1.16. Der Nullphasenwinkel ist daher nicht der Azimutwinkel φ , sondern sein entsprechender Komplementärwinkel $\bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} - \varphi$:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \bar{\varphi}) = A \sin(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) \quad \text{mit} \quad \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}].$$

Wegen $\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \cos(\omega t)$ gilt außerdem

$$x(t) = A \sin(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) = A \cos(\omega t - \varphi) = A \sin(\omega t + \bar{\varphi}).$$

Eine um den Winkel φ verschobene Kosinusschwingung entspricht einer um den Winkel $\bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} - \varphi$ verschobenen Sinusschwingung.

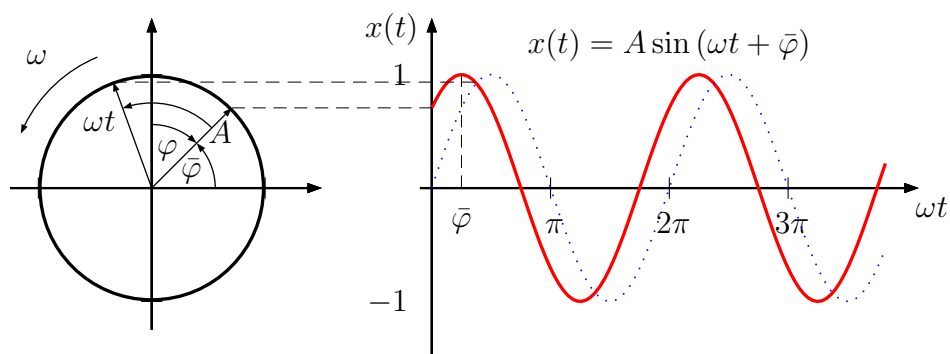


Bild 1.16: Darstellung der phasenverschobenen Sinusschwingung im Zeigerdiagramm

Eine harmonische Schwingung lässt sich immer in der Form

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi) = A \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{mit } \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad (1.7a)$$

bzw.

$$x(t) = A \sin(\omega t + \bar{\varphi}) = A \cos\left(\omega t + \bar{\varphi} - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{mit } \bar{\varphi} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad (1.7b)$$

angeben. Dabei bezeichnen die Nullphasenwinkel φ die Phasenverschiebung der Kosinusschwingung sowie $\bar{\varphi}$ die Phasenverschiebung der Sinusschwingung und geben die Lage des ersten Maximums der Schwingung an.

Man kann mit Hilfe der Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (1.8a)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (1.8b)$$

zeigen, dass sich jede harmonische Schwingung in der allgemeinen Form (1.7a) als Summe zweier harmonischer Schwingungen ohne Phasenverschiebung darstellen lässt:

$$A \cos(\omega t - \varphi) = B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t).$$

Beweis: Mit (1.8b) gilt zunächst

$$A \cos(\omega t - \varphi) = A \cos \varphi \cos(\omega t) + A \sin \varphi \sin(\omega t).$$

Definieren wir nun

$$B := A \cos \varphi \quad \text{und} \quad C := A \sin \varphi,$$

dann erhalten wir

$$A \cos(\omega t - \varphi) = B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t),$$

was zu zeigen war. Dabei gilt

$$B^2 + C^2 = A^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = A^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{B^2 + C^2}$$

und

$$\frac{C}{B} = \frac{A \sin \varphi}{A \cos \varphi} = \tan \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\left(\frac{C}{B}\right).$$

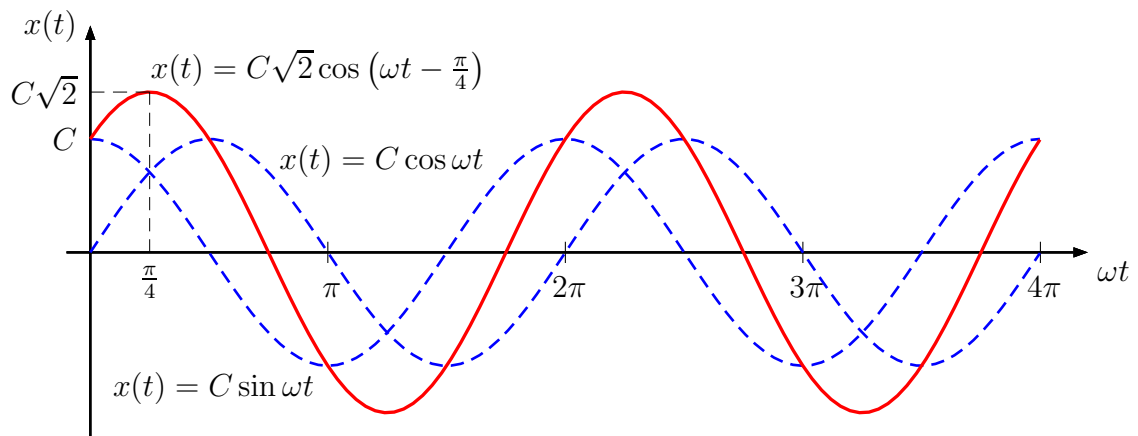


Bild 1.17: Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen gleicher Amplitude

Bei der Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen mit gleicher Amplitude C ergibt sich somit eine um $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ verschobene Kosinusschwingung mit der Amplitude $C\sqrt{2}$, Bild 1.17:

$$C \cos(\omega t) + C \sin(\omega t) = C\sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Mit (1.8a) können wir die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen auch als eine phasenverschobene Sinusschwingung darstellen:

$$A \sin(\omega t + \varphi) = A \cos \varphi \sin(\omega t) + A \sin \varphi \cos(\omega t).$$

Mit den Definitionen

$$B := A \cos \varphi \quad \text{und} \quad C := A \sin \varphi$$

gilt

$$A \sin(\omega t + \varphi) = C \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Zwischen den Amplituden A , B und C gelten die selben Beziehungen wie zuvor.

Eine um den Winkel φ phasenverschobene, harmonische Schwingung ist eine Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen ohne Phasenverschiebung:

$$A \cos(\omega t - \varphi) = B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t) \quad \text{bzw.} \quad (1.9a)$$

$$A \sin(\omega t + \varphi) = C \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (1.9b)$$

mit

$$A = \sqrt{B^2 + C^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{C}{B}\right). \quad (1.9c)$$

Wir wollen den Einfluss der Parameter A und φ abschließend noch grafisch darstellen und wählen hierfür die festen Werte $\omega = 1/s$ und das Zeitintervall $t = 0, \dots, 2\pi$.

In Bild 1.18 ist der Einfluss der Amplitude für $A = 1, 1,5$ und 2 bei einer festen Phasenverschiebung $\varphi = 0$ dargestellt. Man erkennt, dass die Schwingungsdauer von einer Variation der Amplitude unabhängig ist, die Nullstellen bleiben unverändert.

In Bild 1.19 ist der Einfluss der Phasenverschiebung für die Winkel $\varphi = 0, \pi/4$ und $\pi/2$ bei einer festen Amplitude $A = 1$ dargestellt. Man erkennt die hierdurch verursachte Rechtsverschiebung der harmonischen Funktion. Bei einer Phasenverschiebung $\pi/2$ wird eine reine Kosinusfunktion beschrieben.

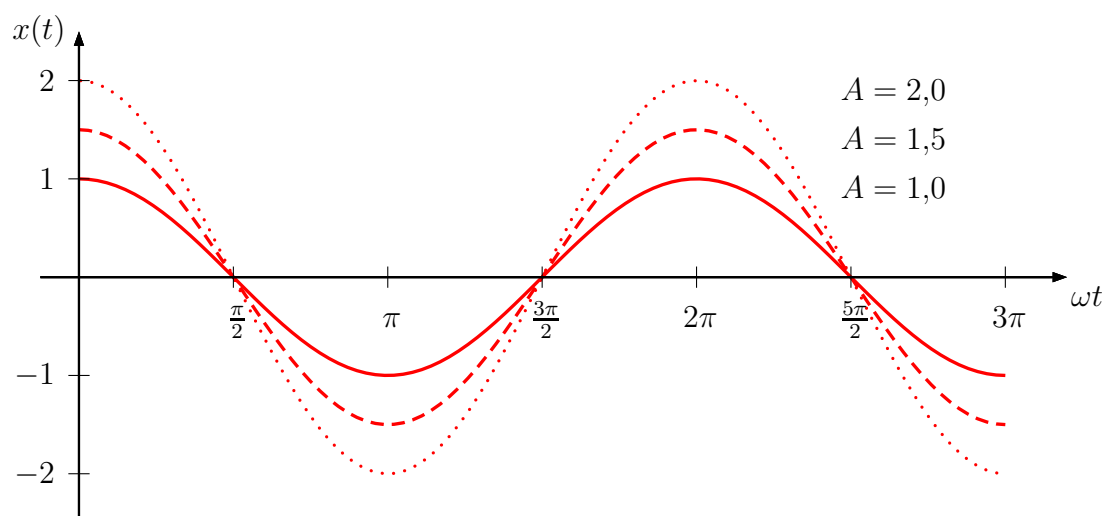
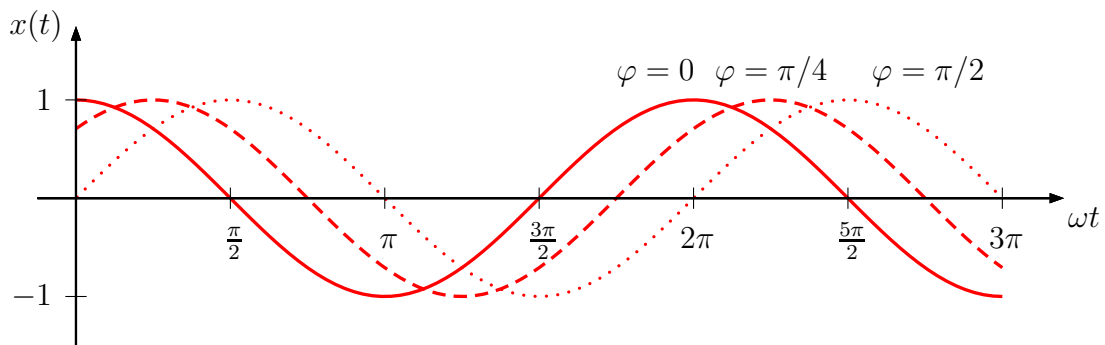


Bild 1.18: Einfluss der Amplitude A

Bild 1.19: Einfluss der Phasenverschiebung φ

1.5.3 Komplexe Darstellung

Eine weitere Darstellungsform von Schwingungen ergibt sich durch folgende Überlegung. Wir betrachten wieder einen Punkt P auf einer Kreisscheibe (Radius A), welche sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω drehe. Zum Zeitpunkt t habe der Punkt den Winkel ωt zurückgelegt ($P \rightarrow P'$). Nun legen wir ein y - z -Koordinatensystem in den Kreismittelpunkt. Der Ortsvektor des Punktes P besitzt nun z -Komponente $z(t) = A \sin \omega t$ und die y -Komponente $y(t) = A \cos \omega t$, Bild a).

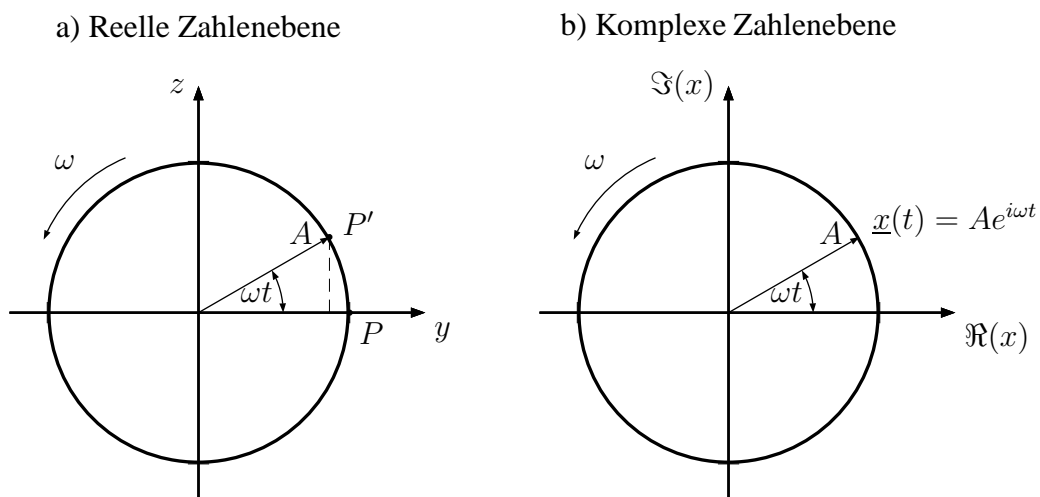


Bild 1.20: Darstellung einer Schwingung in der Gaußschen Zahlenebene

Eine komplexe Zahl $x \in \mathbb{Q}$ lässt sich als Summe aus einer reellen Zahl y und einer imaginären Zahl iz auffassen:

$$x = y + iz \quad \text{mit} \quad y, z \in \mathbb{R},$$

wobei $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit ist und sowohl x als auch y reelle Zahlen sind. Sie stellen den Realteil $\Re(x)$ und den Imaginärteil $\Im(x)$ von x dar.

Fassen wir die in Bild a) dargestellte y -Achse als den Realteil und die z -Achse als den Imaginärteil einer komplexen Zahl $x = y + iz$ auf, so gilt mit den Komponenten $y(t) = A \cos \omega t$ und $z(t) = A \sin \omega t$

$$x(t) = y(t) + iz(t) = A (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

in trigonometrischer Form respektive

$$x(t) = y(t) + iz(t) = Ae^{i\omega t}$$

in der Exponentialform nach Euler.

Eine harmonische Schwingung

$$x(t) = \sin \omega t \quad \text{bzw.} \quad x(t) = \cos \omega t$$

lässt sich in der komplexen Zahlenebene in der Form

$$x(t) = A (\cos \omega t + i \sin \omega t) = Ae^{i\omega t} \quad (1.10)$$

darstellen. Der komplexe Zeiger $x(t)$ besitzt die Länge der Schwingungsamplitude A und den Winkel ωt . Der Realteil $\Re(x)$ repräsentiert eine reine Kosinus- und der Imaginärteil $\Im(x)$ eine reine Sinusschwingung.

Die komplexe Darstellungsform hat ihre Vorteile in der Handhabung der recht einfachen Rechenregeln. So lässt sich die Schwingung elegant in eine Exponentialform darstellen, mit der oftmals viel einfacher zu rechnen ist als mit den trigonometrischen Gleichungen. Darüberhinaus begegnet uns diese Darstellungsform bei der Konstruktion von Lösungen für die Bewegungsgleichungen, die in der Regel als Differentialgleichungen vorliegen.

Ist die betrachtete harmonische Schwingung um den Nullphasenwinkel $\bar{\varphi}$ verschoben, so gilt für eine Kosinusschwingung

$$x(t) = A [\cos(\omega t + \bar{\varphi}) + i \sin(\omega t + \bar{\varphi})] = Ae^{i(\omega t + \bar{\varphi})}.$$

Der letzte Term kann wie folgt geschrieben werden:

$$Ae^{i(\omega t + \bar{\varphi})} = \underbrace{Ae^{i\bar{\varphi}}}_{=: \underline{A}} e^{i\omega t}.$$

Hierbei wurde mit $\underline{A} = Ae^{i\bar{\varphi}}$ die (komplexe) Amplitude der Schwingung definiert. Der Term $e^{i\omega t}$ beinhaltet die zeitliche Veränderung der Schwingung und wird daher als Zeitfunktion der Schwingung bezeichnet. Für $t = 0$ gilt $x(t) = \underline{A}$, siehe Bild 1.21. Liegt keine Phasenverschiebung vor ($\bar{\varphi} = 0$), so ist die Schwingungsamplitude eine reelle Zahl $\underline{A} = A$.

Eine harmonische, um den Nullphasenwinkel $\bar{\varphi}$ verschobene Schwingung lässt sich in der komplexen Zahlenebene in der Form

$$x(t) = \underline{A}e^{i\omega t} \quad (1.11)$$

darstellen. Hierin bezeichnet $\underline{A} = Ae^{i\bar{\varphi}}$ die komplexe Amplitude und $e^{i\omega t}$ die Zeitfunktion der Schwingung.

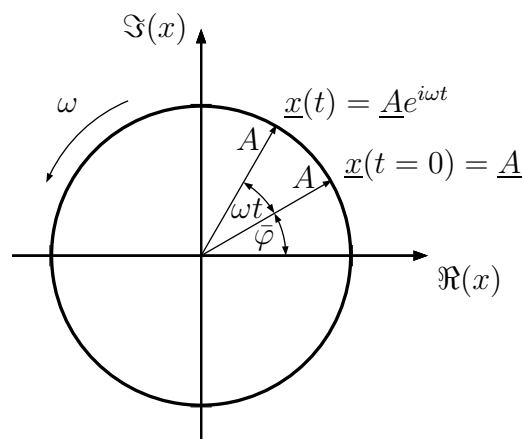


Bild 1.21: Darstellung einer phasenverschobenen Schwingung in der Gaußschen Zahlenebene

1.6 Aufstellen der Bewegungsgleichungen

Neben den bislang dargestellten Grundlagen stellt sich nun die Frage, wie man zu einer mathematischen Beschreibung eines Bewegungsvorganges und somit zur Beschreibung des Schwingung überhaupt kommt. Ein glücklicher Umstand hilft hier weiter: Die Schwingungslehre ist

nämlich ein Teilgebiet der Dynamik, also der Lehre von der Bewegung unter dem Einfluss von Kräften - dem fleißigen Studenten im ingenieurwissenschaftlichen Bereich bestens bekannt als Technische Mechanik 3. Wir wollen die für die Schwingungslehre wichtigsten Erkenntnisse im folgenden (in aller Kürze) zusammenfassen.

Die Grundgesetze der Dynamik, die bei uns eine entscheidende Rolle spielen, wurden erstmals im Jahre 1687 von dem englischen Physiker Isaac Newton formuliert. Trägheitssatz: Ein Körper bleibt im Zustand der Ruhe oder einer gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn die auf ihn einwirkenden Kräfte ein Gleichgewichtssystem bilden. Bewegungsgesetz: Die zeitliche Änderung der Bewegungsgröße eines Körpers ist der resultierend einwirkenden Kraft proportional und ihr gleichgerichtet. Wechselwirkungsgesetz: übt ein Körper auf einen anderen eine Kraft aus, so übt dieser auf den ersten Körper die entgegengesetzt gleich große Kraft aus (oder „*actio=reactio*“, wie der Lateiner sagt). Die Bewegungsgröße des Newtonschen Bewegungsgesetzes ist der Impuls, das Produkt aus der Masse des Körpers und der Geschwindigkeit des Körperschwerpunkts:



Isaac Newton (1643-1727)

$$p = mv_s \quad (1.12)$$

Der Impuls ist, wie die Geschwindigkeit, eine gerichtete Größe, ein Vektor. Das Bewegungsgesetz sagt aus:

$$\frac{dp}{dt} = F_{res} \quad (1.13)$$

oder, wenn man für p das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit einsetzt und die Produktregel der Differentialrechnung anwendet:

$$\frac{dm}{dt}v_s + m\frac{dv_s}{dt} = F_{res} \quad (1.14)$$

Der erste Ausdruck der linken Seite ist bei unseren Anwendungen in der Regel null, da wir es meist mit Körpern zu tun haben, deren Masse zeitlich konstant ist (Maschinenteilen), und nicht beispielsweise mit Raketen, deren Masse sich durch den ausgestoßenen Treibstoff verändert. Bei konstanter Masse nimmt das Bewegungsgesetz für die Schwerpunktsbewegung eines Körpers die bekannte Form

$$ma_s = F_{res} \quad (1.15)$$

an, die wir als Impulssatz oder als Schwerpunktssatz bezeichnen (Masse mal Beschleunigung gleich resultierend eingeprägte Kraft). Außer den 3 Freiheitsgraden der Bewegung des Schwerpunkts in den 3 Raumrichtungen (Translationsfreiheitsgrade) hat ein starrer Körper im Raum noch 3 Freiheitsgrade der Drehung um die 3 Raumachsen durch den Schwerpunkt (Rotationsfreiheitsgrade). Die Drehbewegung eines Körpers wird durch die Winkelgeschwindigkeit der Drehung (anstelle der Geschwindigkeit bei Translationsbewegungen) beschrieben. An die Stelle der trägen Masse tritt bei Drehbewegungen die Drehmasse des Körpers bezüglich der Drehachse. Das ist das Massenmoment 2. Grades (Massenträgheitsmoment)

$$J = \int r^2 dm \quad (1.16)$$

das wie die Flächenträgheitsmomente der Festigkeitslehre gebildet wird. Für die 3 Koordinatenachsen x , y und z durch den Schwerpunkt eines Körpers lassen sich 3 Drehmassen

$$J_x, J_y, J_z$$

und (analog zu den gemischten Flächenträgheitsmomenten) 3 sogenannte Deviationsmomente oder Kippmassen

$$J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$$

berechnen, bei denen jedes Massenelement statt mit dem Abstandsquadrat von einer Achse mit dem Produkt der Abstände von zwei Koordinatenebenen multipliziert wird. In jedem Körper gibt es drei zueinander senkrechte Achsen, für die die Deviationsmomente verschwinden. Diese nennt man Hauptachsen des Körpers. Hat ein Körper eine Symmetrieebene, so liegen 2 Hauptachsen in dieser. Die dritte Hauptachse steht senkrecht zur Symmetrieebene. Die Massenträgheitsmomente eines Körpers bilden ein Tensor 2. Stufe, den man gewöhnlich in Form einer symmetrischen Matrix mit 3 Zeilen und 3 Spalten schreibt. Die Bewegungsgröße für Drehbewegungen ist der Drehimpuls oder Drall, ein Vektor, der sich als Produkt der Matrix der Massenträgheitsmomente mit dem Vektor der Winkelgeschwindigkeiten ergibt:

$$L = J\omega$$

Seine zeitliche Änderung ist dem resultierend einwirkenden Moment proportional und ihm gleichgerichtet:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(J\omega)}{dt} = M_{res} \quad (1.17)$$

Die Bewegungsgleichung für die Drehbewegung nennt man Drallsatz. Der Drallsatz führt im allgemeinen Fall einer räumlichen Drehbewegung zu mathematisch sehr unangenehmen, nicht-linearen Gleichungen, die oft auch als Kreiselgleichungen bezeichnet werden. Nur in zwei Spezialfällen wird der Drallsatz genauso einfach und unkompliziert wie der Impulssatz:

- I) bei der Drehbewegung um eine körperfeste Achse, die gleichzeitig Hauptachse ist
- II) bei der Drehbewegung um eine raum- und körperfeste Achse, die zu einer Hauptachse parallel ist

Für den Bereich der uns interessierenden Maschinenschwingungen treffen diese Voraussetzungen glücklicherweise meistens zu, so dass der Drallsatz als skalare Gleichung

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{res} \quad (1.18)$$

angeschrieben werden kann (Drehmasse mal Drehbeschleunigung gleich resultierend eingepägtes Moment).

2 Schwinger mit einem Freiheitsgrad

Inhalt

2.1	Freie ungedämpfte Schwingung	27
2.2	Federzahlen elastischer Systeme	40
2.3	Freie Schwingung des gedämpften Systems	40
2.4	Harmonische Erregung	50
2.5	Stoßantwort	72
2.6	Beliebige Erregung	76

Bei Schwingern mit einem Freiheitsgrad lässt sich der Ort jedes Körperpunktes durch eine einzige kinematische Größe (Verschiebung des Schwerpunkts oder Drehwinkel um eine körperfeste Achse) zu jedem Zeitpunkt eindeutig beschreiben. Das ist nur möglich, wenn wir vom Modell eines starren Körpers ausgehen, der in irgendeiner Weise beweglich an die Umgebung angekoppelt ist. Eine solche Modellvorstellung ist zulässig, wenn die Verformungen des Körpers (auf Grund seiner Elastizität) sehr klein sind im Vergleich zu den dynamischen Verschiebungen der Körperpunkte. In den folgenden Betrachtungen werden wir uns außerdem auf lineare Schwingungen von Systemen mit konstanten Parametern beschränken.

2.1 Freie ungedämpfte Schwingung

2.1.1 Modell und Bewegungsgleichung

Als erstes Modell zur Untersuchung der Schwingungen eines Systems mit einem Freiheitsgrad, des so genannten Einmassenschwingers, betrachten wir einen Klotz der Masse m , der auf einer horizontalen, ebenen, glatten Unterlage aufliegt und mit einer linearen Feder der Federkonstante k an eine Wand fest angebunden ist.

Offensichtlich besitzt dieses System eine stabile Gleichgewichtslage, nämlich diejenige, bei der die Feder spannungsfrei ist. Jede horizontale Auslenkung des Klotzes aus dieser Lage führt zu Rückstellkräften der Feder. Damit liegt ein schwingungsfähiges System vor.

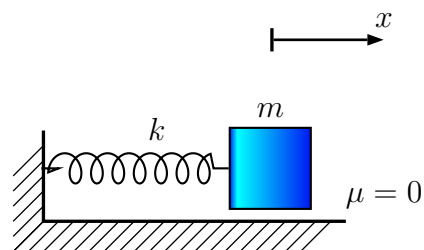


Bild 2.1: Feder-Masse-Schwinger

Zur Beschreibung der Schwingbewegung führen wir als Koordinate die horizontale Position x des Schwerpunkts ein, wobei der Ursprung $x = 0$ die Gleichgewichtslage kennzeichnen soll. Wenn wir den Masseklotz in einer ausgelenkten Lage freischneiden (zweckmäßigerweise bei positiver x -Koordinate), d.h. alle am Klotz angreifenden Kräfte eintragen, so lässt sich in vertikaler Richtung eine Gleichgewichtsbedingung formulieren (aus der die Normalreaktion der Unterlage gegen den Klotz ermittelt wird). In horizontaler Richtung wirkt nur die Federkraft. Folglich ist kein Gleichgewicht möglich. Der Klotz kann in dieser Lage nicht im Zustand der Ruhe oder einer gleichförmigen Bewegung sein. Aus dem Impulssatz folgt für seine Bewegung:

$$ma(t) = -F_F(t) = -kx(t). \quad (2.1)$$

Die Beschleunigung $a(t)$ ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit, die wiederum die zeitliche Ableitung der Ortskoordinate $x(t)$ ist. Folglich genügt die Bewegung des Klotzes der Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t). \quad (2.2)$$

Dies ist eine homogene, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die wir in die sogenannte Normalform bringen:

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \quad (2.3)$$

Man kann sich leicht klarmachen, dass es sehr viele Funktionen gibt, die dieser Bedingung genügen. Man muss ja nur fragen, welche Funktionen beim zweimaligen Ableiten bis auf einen konstanten Faktor und das Vorzeichen gleich der Ausgangsfunktion sind. Das trifft auf die Sinus- und die Kosinusfunktion zu. Tatsächlich ist jede Funktion der Art

$$x(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$$

mit $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ und beliebigen Konstanten A und B eine Lösung der Differentialgleichung. Andere Lösungen gibt es allerdings nicht. Die Differentialgleichung hat also unendlich-quadrat

Lösungen. Wir werden im folgenden Abschnitt diese Lösung der Differentialgleichung im Detail konstruieren.

Die Bewegung des vorliegenden Schwingungssystems wird natürlich nicht in zufälliger Weise irgendeiner dieser Zeitfunktionen folgen. Vielmehr hängt es von den Startbedingungen (Anfangsbedingungen) ab, mit denen man das System einer freien Bewegung überlässt, welche spezielle, eindeutig bestimmte Verschiebungs-Zeit-Funktion sich einstellt. Wir nehmen an, dass wir den Klotz zum Zeitpunkt $t = 0$ bei einer Auslenkung x_0 aus der Ruhe loslassen. Die Anfangsbedingungen lauten dann:

$$x(0) = x_0, \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = 0,$$

und es gibt nur eine einzige Funktion unter all den Lösungsfunktionen, die diese Bedingungen erfüllt:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t.$$

Das ist eine reine Kosinusschwingung mit

- der Amplitude x_0
- der Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- der Periode $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$
- der Frequenz $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

Die Frequenz f_0 der freien Schwingungen eines Schwingers mit einem Freiheitsgrad wird als dessen Eigenfrequenz bezeichnet. Entsprechend bezeichnet man die Größe

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f_0 \tag{2.4}$$

als dessen Eigenkreisfrequenz.

2.1.2 Zur Lösung der Differentialgleichung

Wir wollen eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{2.5}$$

konstruieren. Diese ist allgemein vom Typ $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ und lässt sich mittels eines Exponentialansatz der Form

$$x(t) = Ae^{\lambda t} \tag{2.6}$$

lösen. Die erste und zweite Ableitung des Ansatzes lauten

$$\dot{x}(t) = A\lambda e^{\lambda t} \quad \text{und} \quad \ddot{x}(t) = A\lambda^2 e^{\lambda t}. \quad (2.7)$$

Setzen wir den Ansatz (2.6) und deren zweite Ableitung (2.7) in die Differentialgleichung (2.5) ein, so erhalten wir

$$\ddot{x} + \omega^2 x = A\lambda^2 e^{\lambda t} + A e^{\lambda t} + \omega^2 A e^{\lambda t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + \omega^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat keine reellen, sondern die komplexen Lösungen $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Diese Lösungen ergeben mit dem Ansatz (2.6) zwei linear unabhängige Lösungsfunktionen, nämlich

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad x_2 = A_2 e^{-i\omega t} \quad A_{1,2} \in \mathbb{Q}.$$

Die allgemeine Lösung lässt sich somit als Linearkombination der beiden Lösungen darstellen:

$$x = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}. \quad (2.8)$$

Zum Aufteilen der Lösung in Real- und Imaginärteil ist es hilfreich, die komplexen Koeffizienten $A_{1,2}$ in Exponentialform darzustellen:

$$A_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \quad \text{und} \quad A_2 = r_2 e^{i\varphi_2}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} x &= A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \\ &= r_1 e^{i\varphi_1} e^{i\omega t} + r_2 e^{i\varphi_2} e^{-i\omega t} \\ &= r_1 e^{i(\varphi_1 + \omega t)} + r_2 e^{i(\varphi_2 - \omega t)}. \end{aligned}$$

Den letzten Term in trigonometrischer Darstellung geschrieben lautet

$$\begin{aligned} x &= r_1 e^{i(\varphi_1 + \omega t)} + r_2 e^{i(\varphi_2 - \omega t)} \\ &= r_1 [\cos(\omega t + \varphi_1) + i \sin(\omega t + \varphi_1)] + r_2 [\cos(\omega t - \varphi_2) + i \sin(\omega t - \varphi_2)] \\ &= r_1 [\cos(\omega t + \varphi_1)] + r_2 [\cos(-\omega t + \varphi_2)] + i [r_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + r_2 \sin(-\omega t + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Um eine physikalisch sinnvolle Lösung zu erhalten, muss der Imaginärteil $\Im(x)$ für alle Zeiten verschwinden, d.h.

$$\begin{aligned} \Im(x) &= [r_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + r_2 \sin(-\omega t + \varphi_2)] = 0 \\ \Leftrightarrow \quad r_1 \sin(\omega t + \varphi_1) &= r_2 \sin(\omega t - \varphi_2) \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 \quad \text{und} \quad \varphi_1 = -\varphi_2. \end{aligned}$$

Eingesetzt in den Realteil ergibt

$$\begin{aligned}
 x &= r_1 [\cos(\omega t + \varphi_1)] + r_2 [\cos(-\omega t + \varphi_2)] \\
 &= r_1 [\cos(\omega t + \varphi_1)] + r_1 [\cos(-\omega t - \varphi_1)] \\
 &= r_1 [\cos(\omega t + \varphi_1) + \cos(-\omega t - \varphi_1)] \\
 &= r_1 [\cos(\omega t + \varphi_1) + \cos(\omega t + \varphi_1)] = 2r_1 \cos(\omega t + \varphi_1).
 \end{aligned}$$

Definiert man nun noch die Amplitude $A := 2r_1$ und die Phasenverschiebung $\varphi := -\varphi_1$, so erhält man als Lösung der Differentialgleichung (2.5) schließlich

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi) \quad \text{mit} \quad A, \varphi \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

2.1.3 Schwerependel



Wir betrachten nun zusätzlich den Einfluss der Schwerkraft.

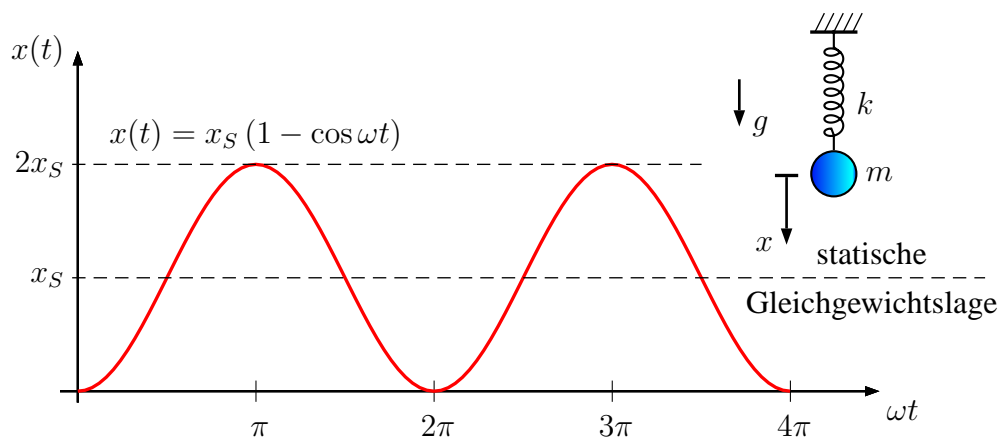


Bild 2.2: Schwingung eines Federpendels um die statische Gleichgewichtslage x_S

2.1.4 Das mathematische Pendel



2.1.5 Das physikalische Pendel



2.1.6 Energieerhaltung

Alle bislang beschriebenen Systeme haben eine wichtige physikalische Eigenschaft gemein: sie alle sind energieerhaltend, so genannte „konservative Systeme“. Das bedeutet, dass in solchen Systemen ein ständiger Austausch zwischen kinetischer Energie E_k und potentieller Energie E_p statt findet. Die Gesamtenergie (oder totale Energie) E des Schwingers ergibt sich aus der Summe aus potentieller und kinetischer Energie. Es gilt der Energiesatz

$$E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0} = E = \text{const.} \quad (2.10)$$

Unter Verwendung der allgemeinen Lösung der Schwingungsgleichung (2.9),

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi),$$

sowie der trigonometrischen Beziehungen

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \text{und} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

ergibt sich für die potentielle Energie

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t - \varphi) = \frac{1}{4}kA^2(1 + \cos 2x). \quad (2.11)$$

Und mit den zeitlichen Ableitung

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t - \varphi)$$

erhalten wir für die kinetische Energie

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - \varphi) = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2(1 - \cos 2x). \quad (2.12)$$

Kinetische und potentielle Energie ändern sich demnach periodisch mit der Frequenz 2ω . Die Verläufe der beiden Energieformen sind in Bild 2.3 für $\varphi = 0$ dargestellt. Die Summe aus kinetische und potentielle Energie ist nach (2.10) stets konstant, nämlich E . Damit muss das Maximum an kinetischer Energie auch dem Maximum an potentieller Energie entsprechen:

$$\max E_k = \max E_p \quad \text{oder} \quad \frac{\max E_p}{\max E_k} = \text{const} = 1. \quad (2.13)$$

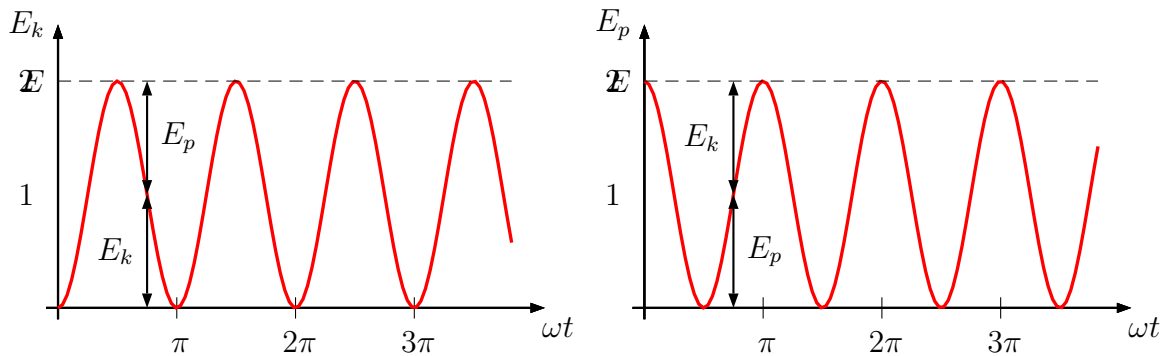


Bild 2.3: Energieerhaltung während des Schwingvorgangs

Aus (2.11) und (2.12) ergeben sich (da die Sinus- und die Kosinusfunktion maximal 1 werden können)

$$\max E_p = \frac{1}{2}kA^2 \quad \text{und} \quad \max E_k = \frac{1}{2}mA^2\omega^2. \quad (2.14)$$

Gleichsetzen nach (2.13) ergibt

$$\begin{aligned} \max E_k &= \max E_p \\ \frac{1}{2}mA^2\omega^2 &= \frac{1}{2}kA^2 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{k}{m}. \end{aligned}$$

Diese Beziehung haben wir bislang lediglich definiert. Über die Energieerhaltung erfährt diese nun auch eine weitere physikalische Bedeutung: Das System muss mit der Eigenkreisfrequenz $\omega = \sqrt{k/m}$ schwingen, damit es energieerhaltend ist. Über den Quotienten (2.13) lässt sich, anders ausgedrückt, auch die Eigenkreisfrequenz ω bestimmen. Er wird auch als „Rayleighscher Quotient“ bezeichnet.

2.1.7 Phasendarstellung einer Schwingung

Eine weitere Darstellungsmöglichkeit für eine Schwingung ist ihre Abbildung in der so genannten Phasenebene. Hierfür wird die Bewegungsgeschwindigkeit $\dot{x} = v = dx/dt$ als Ordinate über den Weg x als Abszisse aufgetragen; wir betrachten also die Funktion $\dot{x}(x)$. In dieser Darstellung ist die Zeit gänzlich eliminiert. Das geübte Auge vermag aus dieser rein geometrischen Gestalt jedoch wichtige Rückschlüsse auf die Eigenschaften der Schwingung zu schließen.

Wir betrachten die Bewegungsgleichung vom Typ

$$m\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (2.15)$$

wobei die Funktion $f(x)$ aus nichtlinear sein kann. Multipliziert man (2.15) mit der Geschwindigkeit \dot{x} und integriert anschließend über die Zeit, so erhält man

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + f(x) &= 0 \\ m\ddot{x}\dot{x} + f(x)\dot{x} &= 0 \\ \int_t \{m\ddot{x}\dot{x} + f(x)\dot{x}\} dt &= \text{const} \\ m \int_t \ddot{x}\dot{x} dt + \int_t f(x)\dot{x} dt &= \text{const}. \end{aligned}$$

Über eine partielle Integration des linken Integrals erhalten wir

$$\int_t \ddot{x}\dot{x} dt = \dot{x}\dot{x} - \int_t \dot{x}\ddot{x} dt \Rightarrow \int_t \ddot{x}\dot{x} dt = \frac{1}{2}\dot{x}^2.$$

Damit ergibt sich der für (2.15) gleichwertige Ausdruck

$$\underbrace{\frac{1}{2}\dot{x}^2}_{=E_k} + \underbrace{\int_t f(x)\dot{x} dt}_{=E_p} = \text{const}. \quad (2.16)$$

Der linke Summand entspricht der kinetischen Energie E_k woraus der zweite Term für ein konservatives, sprich energieerhaltendes System, sich als die potentielle Energie E_p ergibt. Mit $\dot{x} dt = dx$ lässt dieser sich noch als

$$E_p = \int_t f(x)\dot{x} dt = \int_x f(x) dx$$

schreiben und wir erhalten schließlich

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int_x f(x) dx = E_k + E_p = E_0 = \text{const}, \quad (2.17)$$

einen Ausdruck für die Energieerhaltung (2.10). Auflösen dieser Gleichung nach \dot{x} liefert schließlich eine Beziehung zwischen der Bewegungsgeschwindigkeit und dem Weg:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_p)}.$$

Diese Beziehung ist beim Aufstellung der Funktion $\dot{x}(x)$ sehr nützlich, insbesondere dann, wenn die Lösung der Differentialgleichung noch unbekannt ist.

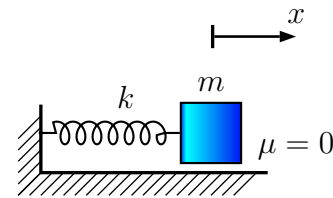
Für ein schwingungsfähiges System, welches durch eine Bewegungsgleichung vom Typ $m\ddot{x} + f(x) = 0$ beschrieben wird, lässt sich über die potentielle Energie

$$E_p(x) = \int_x f(x) dx \quad (2.18)$$

und eine konstante Grundenergie E_0 die Phasenkurve berechnen zu

$$\dot{x}(x) = \sqrt{\frac{2}{m} [E_0] - E_p(x)}. \quad (2.19)$$

Beispiel Feder-Masse-Schwinger: Wir betrachten wieder das Federpendel aus Abbildung 2.1, welches horizontale Schwingungen auf einer reibungsfreien Oberfläche durchführen kann. Wir berechnen die Phasenkurve $\dot{x}(x)$ in zwei Varianten. In der ersten Variante gehen wir den konventionellen Weg über die Lösung der Differentialgleichung. In der zweiten Variante gehen wir den oben vorgestellten alternativen Weg über die Energieerhaltung.



Variante 1: Die Lösung der Differentialgleichung $x(t)$ und deren Ableitung $\dot{x}(t)$ lauten

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t - \varphi) \\ \dot{x} &= -A\omega \sin(\omega t - \varphi). \end{aligned}$$

Dies kann bereits als die gesuchte Phasenkurve $\dot{x}(x)$ in Parameterform betrachtet werden, und zwar mit dem Zeitparameter $t = 0 \dots 2\pi$. Zur geschlossenen Darstellung $\dot{x}(x)$ müssen wir die Zeit noch eliminieren. Hierzu quadrieren wir die beiden obigen Gleichungen $x(t)$ und $\dot{x}(t)$:

$$\begin{aligned} x^2 &= A^2 \cos^2(\omega t - \varphi) \\ \dot{x}^2 &= A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - \varphi). \end{aligned}$$

Dividieren wir die erste Gleichung noch durch A^2 , die letztere durch $A^2 \omega^2$ und addieren wir dann $\frac{x^2}{A^2}$ und $\frac{\dot{x}^2}{A^2 \omega^2}$, so erhalten wir

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2 \omega^2} = \cos^2(\omega t - \varphi) + \sin^2(\omega t - \varphi) = 1. \quad (2.20)$$

Dies ist eine Ellipsengleichung mit den beiden Halbachsen A und $A\omega$ in der Phasenebene, siehe Abbildung 2.4a). Als Freiwert haben wir noch die Amplitude A , welche wir als Scharparameter für unterschiedliche A in der Phasenebene auftragen können. Die so entstehende Schar von Phasenkurven in der Phasenebene bezeichnet man als Phasenportrait, siehe Abbildung 2.4b). Man erkennt hier, dass die Schar von Phasenkurven sich für kleiner werdende A auf einen Punkt streben, dem so genannten Wirbelpunkt (hier dem Nullpunkt). Dies ist die Gleichgewichtslage des Systems.

Eine ungedämpfte Schwingung zeigt im Phasenportrait einen Wirbelpunkt in der Gleichgewichtslage.

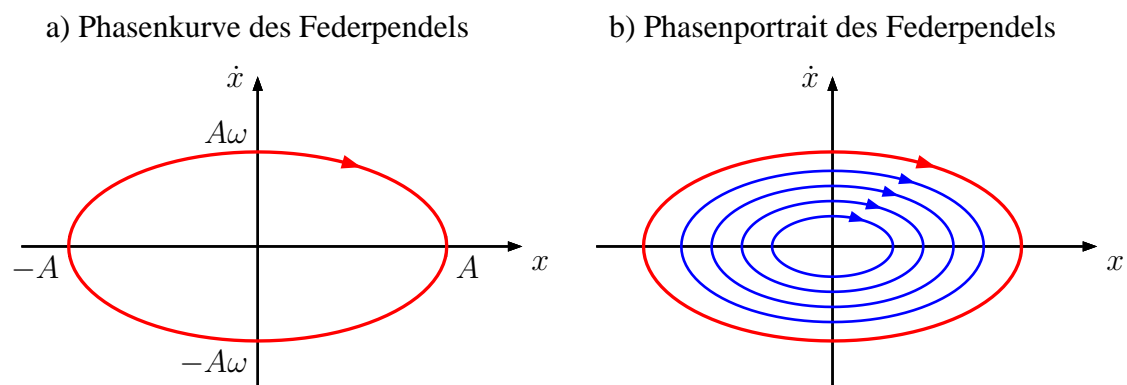


Bild 2.4: Phasenkurve und Phasenportrait

Variante 2: Wir berechnen nun die Phasenkurve des Federpendels ohne Zuhilfenahme der Lösung der Differentialgleichung. Hierzu stellen wir zunächst die potentielle Energie auf:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2. \quad (2.21)$$

Anmerkung: Die potentielle Energie des Systems lässt sich formal über Gleichung (2.18) gewinnen: Mit der Bewegungsgleichung $\ddot{x} + \omega^2x = 0$ folgt $f(x) = m\omega^2x$ und damit:

$$E_p = \int_0^x f(x) dx = \int_0^x m \underbrace{\omega^2}_{=k/m} x dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2.$$

Bekannterweise entspricht dies der Fläche unterhalb des Kraft-Verschiebungs-Diagramms, siehe Abbildung 2.5.

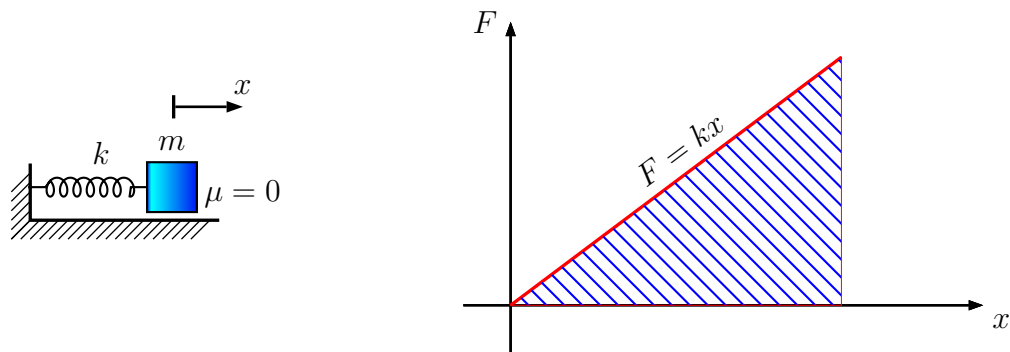


Bild 2.5: Zur potentiellen Energie des Federpendels

Die maximale Energie $\max E_p = E_0$ (oder Grundenergie des Systems) entsteht durch die Anfangsauslenkung $x_0 = A$:

$$E_0 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2. \quad (2.22)$$

Einsetzen von (2.21) und (2.22) in (2.19) liefert:

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E_0 - E_p) = \frac{2}{m} \left(\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

und damit

$$\frac{\dot{x}^2}{\omega^2} = A^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega^2} = 1, \quad (2.23)$$

also das selbe Ergebnis wie in (2.20), allerdings auf anderem Wege.

In diesem Fall führte die Variante 1 genauso schnell zum Ziel wie die Variante 2. Es gibt allerdings Systeme, bei denen eine explizite Eliminierung der Zeit sehr aufwändig wird. Hier wird empfohlen die Parameterdarstellung zu wählen und sich die Phasenkurve als Funktionsgraphen einfach via EDV ausgeben zu lassen. Die Variante 2 über die Gleichungen (2.18)-(2.19) wird empfohlen, wenn die Lösung der Differentialgleichung nicht bekannt ist und man sich dennoch über die Phasenkurve einen Eindruck über das Schwingverhalten des Systems verschaffen möchte.

Beispiel Schwerependel: Im letzten Beispiel konnte man sehr schön einen Wirbelpunkt in der Gleichgewichtslage, dem Nullpunkt, sehen. Wir wollen diese Gleichgewichtslage nun, wie beim Schwerependel bekannt, um die statische Auslenkung x_S verschieben. Somit verschiebt sich auch der Mittelpunkt der Phasenkurve genau um dieses Maß x_S , siehe Abbildung 2.6. Lassen wir noch eine Anfangsauslenkung $x(0) = x_0$ zu, so können wir die Phasenkurve aus Abbildung 2.6 für verschiedene Verhältnisse x_0/x_S zeichnen, um so ein Phasenportrait der Schwingung zu erhalten, siehe Abbildung 2.7. Als Scharparameter wurde gewählt

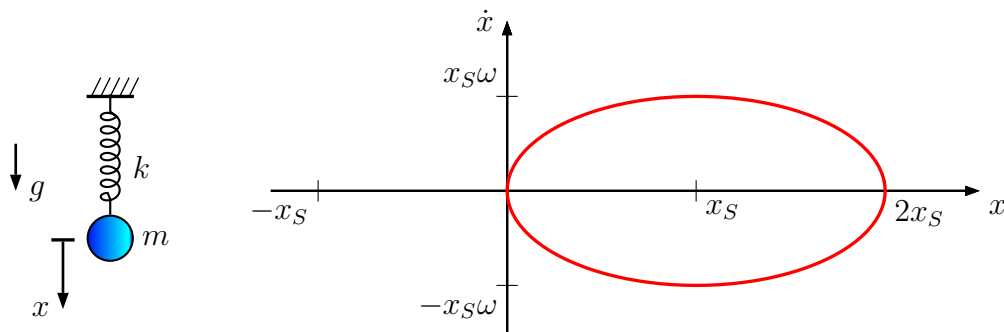


Bild 2.6: Phasenkurve für das Schwerependel mit $\dot{x}(0) = 0$ und $x(0) = 0$

$x_0/x_S = 0; 0,25; 0,5; 0,75$, wobei $x_0/x_S = 0$ dem Fall $x(0) = 0$ entspricht (etwas dickere Linie). Man erkennt auch hier wieder den sich bildenden Wirbelpunkt (Kurvenschar strebt gegen x_S). Für größere Verhältnisse x_0/x_S entfernen sich die Phasenkurven weiter vom Wirbelpunkt,

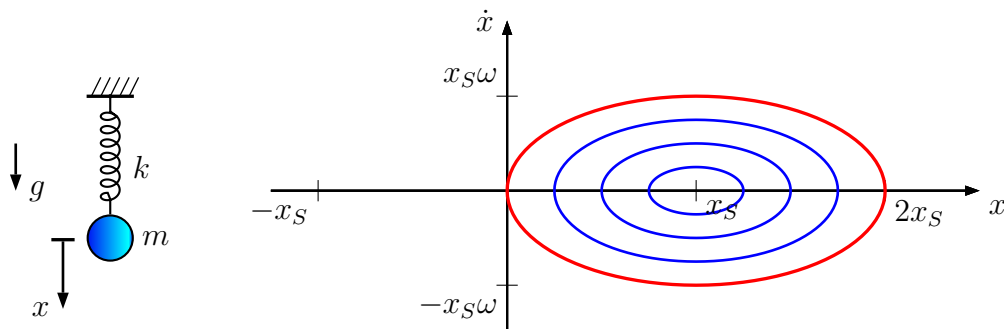


Bild 2.7: Phasenportrait für das Schwerependel mit $\dot{x}(0) = 0$ und $x(0) = x_0$; Scharparameter: $x_0/x_S = 0; 0,25; 0,5; 0,75$

das heißt die Schwingung findet unter größeren Schwingungsamplituden um die Gleichgewichtslage statt, siehe Abbildung 2.8, wobei als Scharparameter $x_0/x_S = 2; 2,25; 2,5; 2,75; 3$ gewählt wurde.

Beispiel mathematisches Pendel: Als letztes Beispiel betrachten wir das mathematische Pendel, wobei wir uns nicht auf die linearisierte Form beschränken wollen. Ausgangspunkt unserer Betrachtung ist die (nichtlineare) Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0 \quad \text{oder} \quad m\ddot{\varphi} + m\omega^2 \sin \varphi = 0.$$

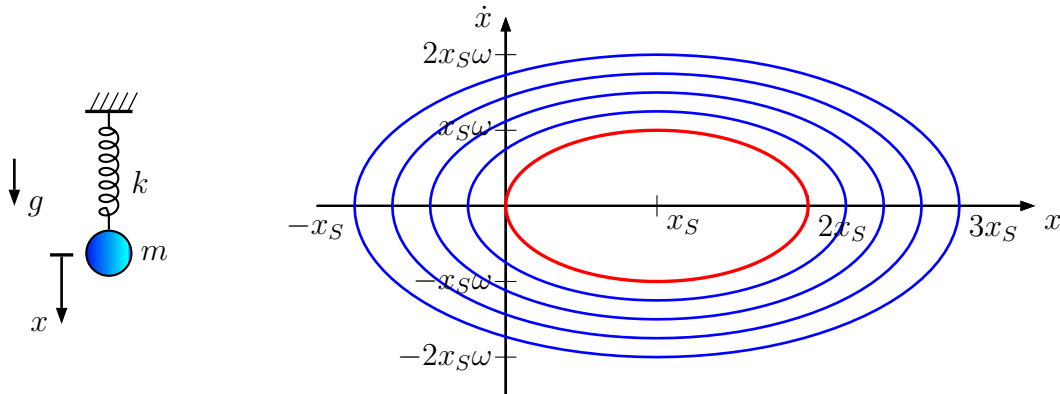


Bild 2.8: Phasenportrait für das Schwerependel mit $\dot{x}(0) = 0$ und $x(0) = x_0$; Scharparameter: $x_0/x_S = 2; 2,25; 2,5; 2,75; 3$

Mit $x = \varphi$ wird $f(x) = m\omega^2 \sin \varphi$ und damit die potentielle Energie

$$E_p = \int_0^x f(x) dx = \int_0^\varphi m\omega^2 \sin \varphi d\varphi = m\omega^2 (1 - \cos \varphi) . \quad (2.24)$$

Bezeichnen wir die maximale Auslenkung von der Ruhelage ($\varphi = 0$) mit $\max \varphi = \varphi_0$ dann wird die maximale im System gespeicherte Energie

$$E_0 = m\omega^2 (1 - \cos \varphi_0) .$$

Einsetzen in (2.19) liefert schließlich

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2\omega^2 (1 - \cos \varphi_0 - 1 + \cos \varphi)} = \omega \sqrt{2 (\cos \varphi - \cos \varphi_0)} . \quad (2.25)$$

In Abbildung 2.9 sind der Verlauf der potentiellen Energie E_0 und die Phasenkurve $\dot{\varphi}(\varphi)$ untereinander dargestellt. In der Nullpunktlage besitzt das System ein Minimum an potentieller Energie und somit eine stabile Gleichgewichtslage. Im Phasendiagramm ist diese Gleichgewichtslage als Wirbelpunkt wieder zu erkennen. Wenn das Pendel in seine obere Lage ($\varphi = \pm\pi$) gedreht wird, so besitzt das System ein Maximum an potentieller Energie und befindet sich somit in einer instabilen Gleichgewichtslage. Jede noch so kleine Auslenkung würde das System nun in Bewegung versetzen. Im Phasendiagramm ist diese instabile Gleichgewichtslage als Sattelpunkt zu erkennen.

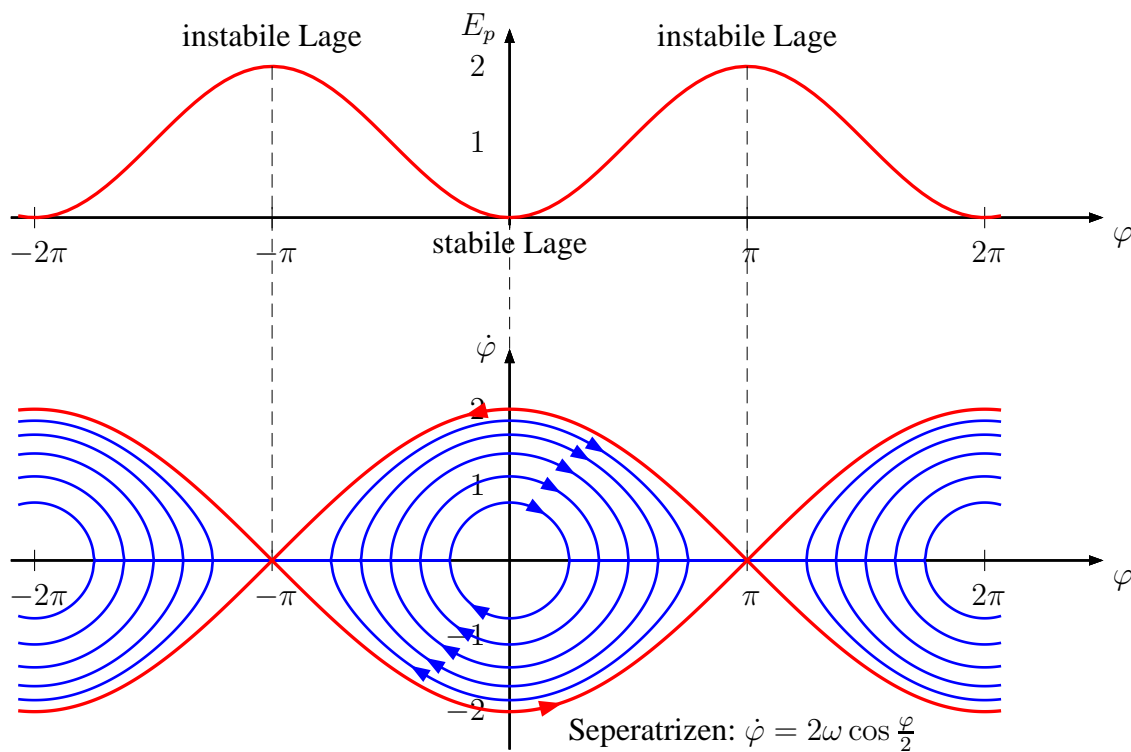


Bild 2.9: Energieverlauf und Phasendiagramm des mathematischen Pendels

2.2 Federzahlen elastischer Systeme



Das in Bild 2.10 dargestellte Ergebnis ist unabhängig von der Lagerung.

2.3 Freie Schwingung des gedämpften Systems

Unter dem Begriff der Dämpfung werden alle physikalischen Phänomene zusammengefasst, die einem schwingenden System einen Teil seiner Schwingungsenergie entziehen. Durch Dämpfung werden die Schwingungsamplituden von freien Schwingungen vermindert, so dass eine einmal angestoßene, freie Schwingung abklingt. Bei mechanischen Schwingungen spricht man von Dämpfung, wenn dem schwingenden System elastomechanische Energie entzogen wird. Dies geschieht entweder durch

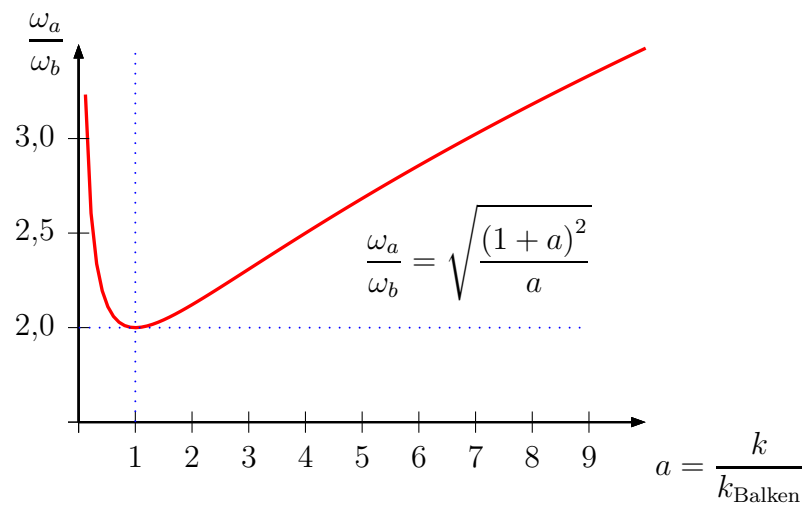


Bild 2.10: Frequenzverhältnis der beiden Systeme

- I) Umwandlung in thermische Energie (z.B. durch Reibung, Viskosität in Flüssigkeiten, hysteretisches Materialverhalten) oder durch
- II) Energieabstrahlung in umgebende Medien in Form elastomechanischer Wellen (Körperschall, Luftschall)

2.3.1 Reibungsdämpfung

Die Reibungsdämpfung ist in der Realität eine der am häufigsten auftretenden Formen der Schwingungsdämpfung. Dass sie dennoch bei Modellrechnungen für Schwingungsvorgänge sehr unbeliebt ist und wenig angewandt wird liegt daran, dass sie zu nichtlinearen Gleichungen führt. Als Modellvorstellung für die Reibung zwischen zwei festen Körpern verwendet man in der Regel die Coulombsche trockene Reibung, bei der gilt:

- Die Reibkraft ist proportional zur Normalkraft in einer Kontaktfläche zweier Körper und wirkt entgegen der Bewegungsrichtung.

Wir betrachten als Modell für ein Schwingungssystem mit einem Freiheitsgrad wieder den Masseklotz auf einer horizontalen, ebenen Unterlage aus Kap. 1.1. unter der dort gewählten Startbedingung: Auslenken um x_0 aus der Gleichgewichtslage und loslassen aus der Ruhe. Die Anfangsbedingungen lauten demnach wiederum:

$$x(0) = x_0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Der einzige Unterschied zur früheren Betrachtung ist, dass die Unterlage diesmal nicht glatt ($\mu = 0$) sondern rau ($\mu > 0$) sein soll. Wenn wir das System in einer beliebigen ausgelenkten Lage freimachen, müssen wir diesmal, im Gegensatz zur früheren Betrachtung, noch die momentane Bewegungsrichtung festlegen, da sie die Richtung der Reibkraft bestimmt. Bei einer Anfangsauslenkung nach rechts (in positiver x-Richtung) wird sich der Klotz zu Anfang nach links bewegen. Die Reibkraft ist also zunächst nach rechts gerichtet. Vertikal herrscht Gleichgewicht, so dass die Normalreaktion der Unterlage gegen den Klotz

$$F_N = mg \quad (2.26)$$

ist, und die Reibkraft sich nach dem Couombschen Gesetz zu

$$F_R = \mu mg \quad (2.27)$$

ergibt. Der Impulssatz für die Horizontalbewegung des Klotzes in der Anfangsphase lautet

$$m\ddot{x} = -F_F + F_R \quad (2.28)$$

oder in der Normalform, nach Einsetzen der Ausdrücke für Feder- und Reibkraft:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \mu g \quad (2.29)$$

Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung ist uns bereits vom Federpendel her bekannt:

$$x(t) = A_1 \sin \omega_0 t + B_1 \cos \omega_0 t + x_R, \quad (2.30)$$

mit $x_R = \frac{F_R}{k} = \frac{\mu mg}{k}$ und $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Die spezielle Lösung zu den von uns gewählten Anfangsbedingungen lautet

$$x(t) = (x_0 - x_R) \cos \omega_0 t + x_R \quad (2.31)$$

Der reibungsgedämpfte Schwinger hat folglich die gleiche Eigenfrequenz wie der ungedämpfte Schwinger

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.32)$$

Die Schwingung findet jedoch um eine, gegenüber der Gleichgewichtslage $x = 0$ des reibungsfreien Systems verschobene „Gleichgewichtslage“ $x = x_R$ statt. Die Schwingungsamplitude beträgt im 1. Abschnitt der Bewegung $\hat{x}_1 = x_0 - x_R$. Der 1. Abschnitt der Bewegung endet,

wenn der Klotz im Umkehrpunkt der Schwingbewegung zum ersten Mal zur Ruhe kommt, also nach einem halben Schwingungszyklus. Dann ändert sich die Bewegungsrichtung und damit auch die Richtung der Reibkraft. Die Schwinggeschwindigkeit im 1. Abschnitt ist

$$\dot{x}(t) = -(x_0 - x_R)\omega_0 \sin \omega_0 t \quad (2.33)$$

Sie wird zur Zeit $t_1 = \frac{T_0}{2} = \frac{\pi}{\omega_0}$ erstmals null. Der Bewegungszustand des Klotzes zu dieser Zeit liefert die Anfangsbedingung für den 2. Abschnitt der Bewegung:

$$x(t_1) = -x_1 = -(x_0 - 2x_R) \quad (2.34)$$

$$\dot{x}(t_1) = 0 \quad (2.35)$$

Der Impulssatz im 2. Abschnitt, auf Normalform gebracht, lautet

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = -\mu g \quad (2.36)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$x(t) = A_1 \sin \omega_0 t + B_1 \cos \omega_0 t \quad (2.37)$$

Die spezielle Lösung zu den neuen Anfangsbedingungen wird

$$x(t) = (x_1 - x_R) \cos \omega_0 t - x_R \quad (2.38)$$

Die Schwingung findet jetzt um eine gegenüber der Gleichgewichtslage $x = 0$ des reibungsfreien Systems verschobene Gleichgewichtslage $x = -x_R$ statt. Die Schwingungsamplitude beträgt im 2. Abschnitt der Bewegung nur noch

$$\hat{x}_2 = x_0 - 3x_R$$

Die Schwinggeschwindigkeit im 2. Abschnitt ist

$$\dot{x}(t) = (x_0 - 2x_R)\omega_0 \sin \omega_0 t$$

Sie wird zur Zeit $t_2 = T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ erstmals null. Der Bewegungszustand des Klotzes zu dieser Zeit liefert dann die Anfangsbedingungen für den 3. Abschnitt der Bewegung:

$$x(t_2) = x_2 = x_0 - 4x_R, \quad (2.39)$$

$$\dot{x}(t_2) = 0. \quad (2.40)$$

Im 3. Abschnitt der Bewegung liegen, durch die erneute Umkehr der Bewegungsrichtung, die gleichen Verhältnisse wie im 1. Abschnitt vor, sodass

$$x(t) = (x_2 - x_R) \cos \omega_0 t + x_R$$

wird. Die Amplitude im 3. Abschnitt ist

$$\hat{x}_3 = x_0 + 5x_R \quad (2.41)$$

Die Schwingungsamplituden nehmen folglich bei einer reibungsgedämpften freien Schwingung um $2x_R$ pro halbem Schwingungszyklus ab

$$\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i - 2x_R.$$

Die Ursache dafür ist, dass in jedem Halbzyklus eine konstante Reibkraft der Bewegung entgegenwirkt, und sich dadurch die Mittellage der Schwingung, die wir als Gleichgewichtslage des Reibschwingers bezeichnet haben, aus der Gleichgewichtslage des reibungsfreien Systems in Richtung auf die Ausgangslage der jeweiligen Bewegung hin verschiebt. Die Größe dieser Verschiebung entspricht der Reibkraft dividiert durch die Federkonstante. Wenn zum ersten Mal die Federkraft in einem Umkehrpunkt kleiner als die Reibkraft ist, das heißt wenn der Umkehrpunkt der Schwingbewegung innerhalb des Intervalls $(x_R, -x_R)$ liegt, kommt die Bewegung zur Ruhe.

Anmerkungen:

- I) In der Statik haben wir zwischen Haftreibung und Gleitreibung unterschieden. Der Haftreibungskoeffizient ist in der Regel größer als der Gleitreibungskoeffizient in einer Kontaktfläche zweier Körper. Streng genommen bleibt der Klotz in Ruhe, wenn ein Umkehrpunkt der Schwingbewegung erstmals innerhalb des Intervalls $(x_{R0}, -x_{R0})$ liegt, mit $x_{R0} = \frac{\mu_0 mg}{k}$
- II) Formal lässt sich die Differentialgleichung des Reibschwingers mit Hilfe der Signumfunktion (signum = Vorzeichen) so schreiben, dass die Gleichung für alle Abschnitte gilt:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = -\mu g \text{sign}(\dot{x})$$

Die Funktion $\text{sign}(\dot{x})$ übernimmt dann die Aufgabe, für das jeweils zutreffende Vorzeichen zu sorgen, da sie folgendermaßen definiert ist:

$$\text{sign}(\dot{x}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \dot{x} > 0 \\ 0 & \text{für } \dot{x} = 0 \\ -1 & \text{für } \dot{x} < 0 \end{cases} . \quad (2.42)$$

2.3.2 Lineare viskose Dämpfung

Unter Viskosität versteht man die Eigenschaft von Flüssigkeiten, eine Widerstandskraft gegen die Bewegung eines Körpers in der Flüssigkeit aufzubringen, die proportional zur Geschwindigkeit des Körpers ist:

$$F_D = -d\dot{x}. \quad (2.43)$$

Diese Widerstandskraft gegen die Bewegung, die viskose Dämpferkraft, führt, genau wie die trockene Reibung, zu einem Verlust an elastokinetischer Energie. Wegen der Linearität der Dämpferkraft ist die viskose Dämpfung die meistverwendete Modellvorstellung für die Dämpfung in mechanischen Systemen, obwohl tatsächlich die Dämpfung von Schwingungen eher durch äußere Reibung, oder durch das hysteretische Werkstoffverhalten erfolgt, als durch Viskosität. Die Proportionalitätskonstante d in dem oben genannten Gesetz für den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und viskoser Dämpferkraft bezeichnet man als Dämpfungskonstante oder als die Dämpferrate, analog zu der Bezeichnung Federkonstante bzw. Federate für die Proportionalitätskonstante k bei einer linearen Feder. Als Symbol für die viskose Dämpfung wird in Schwingungsmodellen ein Kolben verwendet, der sich in einem Zylinder bewegt, den man sich mit einer viskosen Flüssigkeit gefüllt denkt, wie beim sog. Stoßdämpfer (engl. dashpot) in Kraftfahrzeugen, der in Wirklichkeit nicht Stöße beim Durchfahren von Schlaglöchern dämpft, sondern die daraus resultierenden Schwingungen. Als Schwingungsmodell, für das die Schwingungsgleichung aufgestellt werden soll, wählen wir wieder den an einer vertikalen Feder hängenden Masseklotz. Parallel zur Feder ist ein viskoser Dämpfer angebracht. Als Bewegungskordinate wird eine vertikale x -Koordinate eingeführt (positive Richtung nach unten). Als Koordinatenursprung verwenden wir die statische Gleichgewichtslage, und als Anfangsbedingungen für unser Beispiel:

$$x(0) = -x_{st} = -\frac{mg}{k}\dot{x}(0) = 0,$$

das heißt, der Klotz soll zur Zeit $t = 0$ an die spannungsfreie Feder angehängt und aus der Ruhe losgelassen werden. Auf den in einer beliebigen Lage $x > 0$ freigeschnittenen Klotz wirken drei Kräfte ein:

- I) die Gewichtskraft $F_G = mg$ (beschleunigend)
- II) die Federkraft $F_F = k(x_{st} + x)$ (verzögernd)
- III) die Dämpferkraft $F_D = d\dot{x}$ (verzögernd).

Die Bewegungsgleichung (der Impulssatz) lautet demnach:

$$m\ddot{x} = F_G - F_F - F_D \quad (2.44)$$

oder, nach einigen Umformungen, in der Standardform:

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (2.45)$$

Mit den Abkürzungen:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{und} \quad 2D\omega_0 = \frac{d}{m}$$

lässt sich diese homogene, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten in der Form

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (2.46)$$

schreiben. Dabei ist

$$D = \frac{d}{2m\omega_0} \quad (2.47)$$

das sog. Lehrsche Dämpfungsmaß und ω_0 die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Schwingers. Der Lösungsansatz $x = Ae^{\lambda t}$ führt auf eine quadratische Gleichung in λ :

$$\lambda^2 + 2D\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (2.48)$$

Nur für deren zwei Lösungen, die als Eigenwerte bezeichnet werden, gibt es nichttriviale Lösungen der homogenen Differentialgleichung :

$$\lambda_{1,2} = -D\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{D^2 - 1} \quad (2.49)$$

Bezüglich der Art der Lösungen der Eigenwertgleichung sind drei Fälle zu unterscheiden:

- $D > 1$ es gibt zwei reelle Lösungen,
- $D = 1$ die beiden Lösungen fallen zusammen,
- $D < 1$ es gibt zwei konjugiert komplexe Lösungen.

Die beiden ersten Fälle ergeben Exponentialfunktionen als Lösungsfunktionen der Differentialgleichung, d.h. sie führen nicht auf Schwingungen, sondern auf Bewegungen, die man als Kriechvorgänge bezeichnet. Wir betrachten aber zuerst den Regelfall $D < 1$. In diesem Fall ergeben sich die konjugiert komplexen Eigenwerte zu

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm j\omega_d \quad (2.50)$$

wobei als weitere Hilfsgrößen der Abklingfaktor

$$\delta = D\omega_0 \quad (2.51)$$

und die Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingungen

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2} \quad (2.52)$$

eingeführt wurden.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung wird in diesem Fall

$$x(t) = e^{-\delta t} (A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t}) \quad (2.53)$$

mit zwei frei wählbaren Konstanten A_1 und A_2 . Dass es sich bei dieser Bewegung um eine Schwingung handelt, wird klarer, wenn man die Exponentialfunktionen mit imaginären Argumenten mit Hilfe der Eulerformel

$$e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha$$

in Sinus- und Kosinusfunktionen umwandelt. Dann erhält man

$$x(t) = e^{-j\delta t} (B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t)) \quad (2.54)$$

mit zwei frei wählbaren Konstanten B_1 und B_2 . Die Summe aus einer Sinus- und einer Kosinusfunktion gleichen Arguments lässt sich auch als Sinus oder als Kosinus mit einer Phasenverschiebung darstellen. Eine dritte Form der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung des gedämpften Einmassenschwingers ist demnach beispielsweise

$$x(t) = e^{-\delta t} B \cos(\omega_d t + \varphi) \quad (2.55)$$

mit zwei frei wählbaren Konstanten B und φ . Bei physikalisch sinnvollen Anfangsbedingungen lassen sich die beiden freien Konstanten in der allgemeinen Lösung eindeutig bestimmen, so dass sich eine eindeutige Bewegungsfunktion der Masse ergibt. In unserem Beispiel, mit den Anfangsbedingungen $x(0) = -x_{st}$ und $\dot{x}(0) = 0$ werden die Konstanten zu

$$B = \frac{-x_{st}}{\sqrt{1 - D^2}}$$

und

$$\varphi = \arctan \frac{-\delta}{\omega_d}$$

ermittelt.

Anmerkung: Häufig haben wir es mit schwach gedämpften Systemen zu tun, bei denen das Lehrsche Dämpfungsmaß D deutlich kleiner als 1 ist (z.B. $D < 0.05$).

In diesem Fall wird $1 - D^2 \approx 1$, sodass

$$\omega_d \approx \omega_0$$

und

$$\varphi = -D$$

gelten. Das heißt, die Eigenkreisfrequenzen des gedämpften und des ungedämpften Schwingers unterscheiden sich nur unwesentlich, und der Betrag des Phasenwinkels (im Bogenmaß) ist praktisch gleich dem Lehrschen Dämpfungsmaß. Wenn wir uns ein Bild von der zur Zeit $t = 0$ einsetzenden Bewegung unseres Einmassenschwingers verschaffen wollen, gehen wir so vor, dass wir zunächst die Kosinusfunktion mit der Periode

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

und der Phasenverschiebung

$$\Delta t = \frac{\varphi}{\omega_d}$$

sowie in einem zweiten Diagramm die Exponentialfunktionen

$$\pm B e^{-\delta t}$$

skizzieren und dann, in einem dritten Diagramm den Weg-Zeit-Verlauf des Schwingungsvorgangs als das Produkt dieser Funktionen konstruieren. Dabei wird die Bezeichnung Abklingfaktor für δ verständlich, da die Größe dieses Wertes die Verminderung der Schwingungsamplituden im Zeitverlauf bestimmt. Für zwei aufeinanderfolgende, gleichsinnige Spitzenwerte \hat{x}_i und \hat{x}_{i+1} gilt:

$$\frac{\hat{x}_i}{\hat{x}_{i+1}} = e^{\delta T_d}$$

Damit ergibt sich bei experimentellen Schwingungsuntersuchungen die Möglichkeit, aus der gemessenen Abnahme der Schwingungsamplituden der freien, gedämpften Schwingungen auf die Größe der Dämpfung zu schließen. Aus der obigen Gleichung folgt durch Logarithmierung

$$\frac{D}{\sqrt{1 - D^2}} = \frac{\ln\left(\frac{\hat{x}_i}{\hat{x}_{i+1}}\right)}{2\pi} \quad (2.56)$$

Für schwach gedämpfte Systeme vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$D = \frac{\ln\left(\frac{\hat{x}_i}{\hat{x}_{i+1}}\right)}{2\pi} \quad (2.57)$$

Das Lehrsche Dämpfungsmaß lässt sich auf diese einfache Weise dem sogenannten logarithmischen Dekrement des Ausschwingvorgangs abschätzen. Dabei spielt es keine Rolle, ob der Schwingweg, die Schwinggeschwindigkeit oder die Beschleunigung gemessen wird, da sich bei allen drei Bewegungsgrößen die Amplituden im gleichen Verhältnis verringern. In praktischen Fällen wird man bei schwach gedämpften Systemen nicht zwei direkt aufeinanderfolgende Spitzenwerte ausmessen, sondern 5 oder 10 volle Schwingungszyklen abzählen. Aus dem logarithmischen Dekrement für N Schwingungen ergibt sich das Dämpfungsmaß zu

$$D = \frac{\ln\left(\frac{\hat{x}_i}{\hat{x}_{i+N}}\right)}{2\pi N} \quad (2.58)$$

Freie, gedämpfte Schwingungen lassen sich experimentell auch für größere Systeme in Rück-schnellversuchen (snap back tests) realisieren. Dabei wird das System aus seiner Gleichgewichtslage ausgelenkt, z.B. durch Spannen eines Seils. Nach dem schlagartigen Lösen der Ver-spannung führt das System freie Schwingungen aus. Bei Systemen mit mehreren Freiheitsgra-den (mehrere Eigenfrequenzen) klingen die höherfrequenten Schwingungsanteile i.a. schnel-ler ab als die grundfrequenten Anteile, sodass aus der gemessenen Schwingungsantwort die Eigenfrequenz der Grundschiwingung und näherungsweise deren Dämpfung ermittelt werden können. Nach dem für uns interessanten Fall $D < 1$, bei dem das gedämpfte System schwingt, sind noch die beiden Fälle zu untersuchen, bei denen es, wie erwähnt, bei einer Störung der stabilen Gleichgewichtslage des Systems zu Kriechvorgängen kommt. Fall $D > 1$ In diesem Fall liefert die Eigenwertgleichung zwei verschiedene reelle Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -D\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{D^2 - 1} \quad (2.59)$$

die beide negativ sind. Deshalb führt man mit

$$\delta_1 = -\lambda_1 = D\omega_0 - \omega_0\sqrt{D^2 - 1} \quad (2.60)$$

$$\delta_2 = -\lambda_2 = D\omega_0 + \omega_0\sqrt{D^2 - 1} \quad (2.61)$$

zwei neue, positive Größen ein, mit denen sich die allgemeine Lösung der Differentialglei-chung im Fall $D > 1$ in der Form

$$x(t) = A_1e^{-\delta_1 t} + A_2e^{-\delta_2 t} \quad (2.62)$$

angeben lässt. Als spezielle Lösung zu den von uns angenommenen Anfangsbedingungen $x(0) = -x_{st}$ und $\dot{x}(0) = 0$ erhalten wir

$$x(t) = -x_{st} \frac{-\delta_2 e^{-\delta_1 t} - \delta_1 e^{-\delta_2 t}}{\delta_2 - \delta_1} \quad (2.63)$$

Fall $D = 1$ In diesem Fall liefert die Eigenwertgleichung zwei zusammenfallende, reelle Lösungen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_0 \quad (2.64)$$

Man kann zeigen, dass sich in diesem Sonderfall die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zu

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega_0 t} \quad (2.65)$$

ergibt. Die spezielle Lösung zu den obigen Anfangsbedingungen wird dann

$$x(t) = -x_{st}(1 + \omega_d t)e^{-\omega_0 t} \quad (2.66)$$

Auch das ist wieder ein Kriechvorgang. In der angelsächsischen Literatur spricht man im Fall $D = 1$ von kritischer Dämpfung (critical damping), da dieser Wert die Grenze zwischen periodischem und nichtperiodischem Verhalten des Schwingungssystems markiert. Dämpfungswerte werden in der Regel in Prozent der kritischen Dämpfung angegeben (5% of critical damping bedeutet $D = 0,05$)

In der deutschsprachigen Literatur wird der Grenzfall $D = 1$ im allgemeinen als der aperiodische Grenzfall bezeichnet.

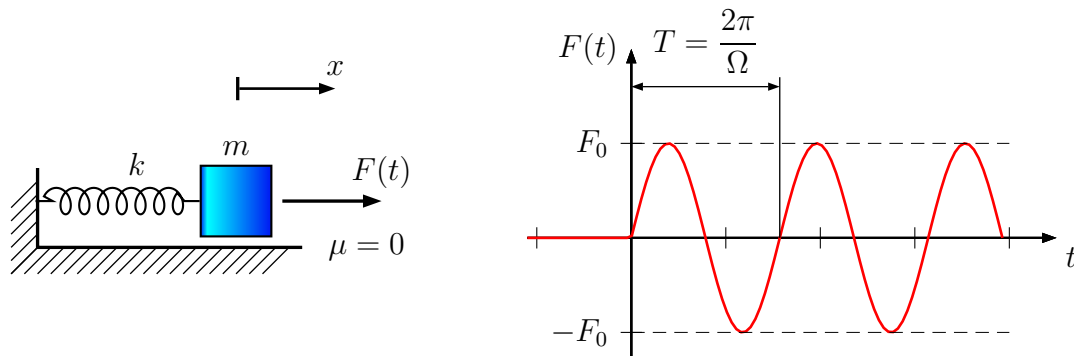
2.4 Harmonische Erregung

Von einer harmonischen Erregung spricht man, wenn eine reine Sinuserregung in einer festen Frequenz vorliegt. Die Schwingungserregung kann dabei sowohl direkt als Krafterregung oder Unwucherregung erfolgen, als auch indirekt über die periodische Bewegung des Befestigungsortes eines schwingungsfähigen Bauteils. In diesem Fall spricht man von Fußpunkterregung.

2.4.1 Krafterregung

2.4.1.1 Ungedämpftes System

Wir untersuchen zunächst das Verhalten eines ungedämpften Einmassenschwingers und wählen als Modell den Masseklotz auf ebener, glatter Unterlage. Den Nullpunkt der Bewegungskordinate x legen wir in die Schwerpunktslage, bei der die Feder spannungsfrei ist. In dieser Gleichgewichtslage ist das System für Zeiten $t < 0$ in Ruhe. Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll eine harmonische Krafterregung beginnen: $F(t) = 0$ für $t \leq 0$



$F(t) = F_0 \sin \Omega t$ für $t > 0$ Ω ist dabei die Erregerkreisfrequenz und F die Amplitude der harmonischen Erregerkraft. Nach dem Freimachen des Masseklötzes lässt sich die Bewegungsgleichung wie folgt aufstellen:

$$m\ddot{x} = F - F_F = F_0 \sin \Omega t - kx \quad (2.67)$$

Wenn wir anstelle der Kraftamplitude die zugehörige statische Auslenkung der Feder einführen $x_0 = \frac{F_0}{k}$ und wie üblich $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ setzen, ergibt sich die inhomogene Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_0 \sin \Omega t \quad (2.68)$$

Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung setzt sich zusammen aus der bekannten allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung

$$x_h = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t \quad (2.69)$$

und einer beliebigen (partikulären) Lösung der inhomogenen Gleichung, die man durch Probieren finden muss. Üblicherweise versucht man zuerst einen Lösungsansatz nach Art der rechten Seite, also in diesem Fall mit der Sinusfunktion

$$x_p = C \sin \Omega t$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung lässt sich zeigen, dass diese Funktion eine Lösung der Differentialgleichung darstellt, wenn

$$C = x_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

ist. Mit der Abkürzung $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$ für das Verhältnis von Erregerkreisfrequenz zu Eigenkreisfrequenz des Systems wird die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung des betrachteten Problems

$$x(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t + x_0 \frac{\sin \Omega t}{1 - \eta^2} \quad (2.70)$$

Diese allgemeine Lösung enthält noch die zwei beliebigen Konstanten A und B die mit Hilfe der Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ ermittelt werden:

$$A = -x_0 \frac{\eta}{1 - \eta^2} \quad B = 0$$

Die spezielle Lösung der Differentialgleichung zu den vorliegenden Anfangsbedingungen lautet folglich

$$x(t) = \underbrace{-x_0 \frac{\eta}{1 - \eta^2} \sin \omega t}_{=: x_f(t) \text{ freie Schwingung}} + \underbrace{x_0 \frac{1}{1 - \eta^2} \sin \Omega t}_{=: x_e(t) \text{ erzwungene Schwingung}} \quad (2.71)$$

Das sind zwei Sinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz, die sich überlagern:

- eine freie Schwingung $x_f(t)$ in der Eigenfrequenz des Systems,
- eine erzwungene Schwingung $x_e(t)$ in der Erregerfrequenz.

Beispiel: $\eta = \frac{1}{3}$, das heißt $\Omega = \frac{1}{3}\omega$, also $x(t) = -0,375x_0 \sin \omega t + 1,125x_0 \sin \Omega t$

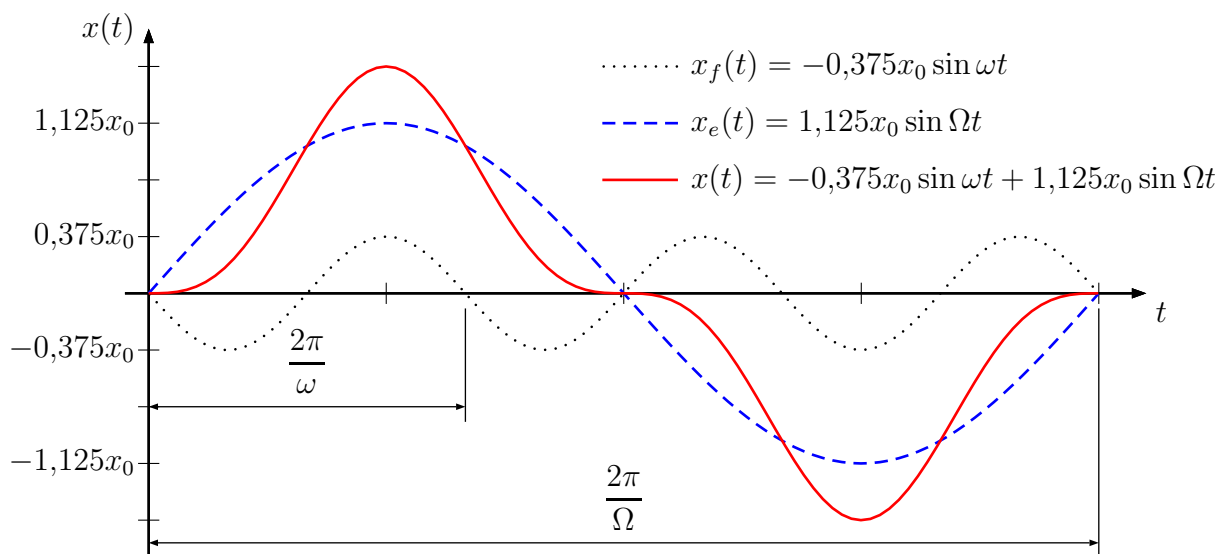


Bild 2.11: Wegantwort einer Krafterregung für $\eta = \frac{1}{3}$

Die freie Schwingung wird durch die Anfangsstörung (die plötzlich einsetzende Kraft) angestoßen, und klingt bei einem realen System, bei dem in jedem Fall etwas Dämpfung vorhanden ist, mit der Zeit ab. In den meisten Fällen interessiert nur die stationäre Schwingung, die sich bei einer stationären harmonischen Erregung (konstante Frequenz und konstante Erregerkraftamplitude) einstellt, und das ist die erzwungene Schwingung

$$x(t) = x_0 \frac{\sin \Omega t}{1 - \eta^2}$$

deren Amplitude $\hat{x} = \frac{x_0}{1-\eta^2}$ von der statischen Auslenkung der Feder unter der Erregerkraft sowie vom Verhältnis der Erregerkreisfrequenz zur Eigenkreisfrequenz des Schwingers abhängt, das auch gleich dem Verhältnis der zugehörigen Frequenzen ist

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{f_{err}}{f_0} \quad (2.72)$$

Die Frequenzabhängigkeit der Schwingungsamplituden bei stationärer harmonischer Erregung wird durch die sogenannte Vergrößerungsfunktion V beschrieben, die bei harmonischer Krafterregung

$$V_1(\eta) = \frac{\hat{x}}{x_0} = \frac{1}{1-\eta^2} \quad (2.73)$$

wird. Die Vergrößerungsfunktion gibt an, um welchen Faktor die Amplitude der stationären Schwingungen bei harmonischer Erregung größer ist als die statische Auslenkung unter der gleichen Kraft. Logischerweise hat sie für $\eta = 0$ den Wert 1, da dies der statische Lastfall ist (Erregerkreisfrequenz $\Omega = 0$). Mit wachsender Erregerfrequenz wird der Nenner kleiner, d.h. der Wert von V wird größer, bis bei $\eta = 1$ der Nenner null wird und damit $V = \infty$. Für Werte von $\eta > 1$ nimmt die Vergrößerungsfunktion negative Werte mit abnehmendem Betrag an, und geht für $\eta \rightarrow \infty$ gegen null. Den Fall $\eta = 1$, in dem die Erregerfrequenz gleich der Eigenfrequenz des Schwingungssystems ist, nennt man den Resonanzfall $\Omega = \omega_0$ bzw. $f_{err} = f_0$. Bei einer harmonischen Erregung eines ungedämpften Systems in Resonanz wächst die Schwingungsamplitude über alle Grenzen. In Fällen $\eta > 1$, in denen die Erregerfrequenz größer als die Eigenfrequenz des Schwingungssystems ist, sind die Schwingungsausschläge eines ungedämpften Systems zu jedem Zeitpunkt in Gegenphase zur Erregerkraft

$$x(t) = -x_0 \frac{\sin \Omega t}{|1 - \eta^2|} \quad (2.74)$$

oder

$$x(t) = x_0 \frac{\sin \Omega t - \pi}{|1 - \eta^2|} \quad (2.75)$$

Der Schwingweg $x(t)$ hat bei harmonischer Erregung oberhalb der Resonanzfrequenz gegenüber der Erregerkraft $F(t)$ eine Phasenverschiebung von -180 Grad. Die Erregerkraft wirkt also ständig gegen die Bewegungsrichtung der trägen Masse des Schwingers, wodurch die Schwingungsamplituden verringert werden.

2.4.1.2 Gedämpftes System

Wir betrachten jetzt ein gedämpftes System bei harmonischer Krafterregung, indem wir in unser Modell einen linearen viskosen Dämpfer mit der Dämpferkonstante d parallel zur Feder

einsetzen. Die Kräfte in der Bewegungsgleichung müssen dann um die Dämpferkraft erweitert werden. Nach der üblichen Umformung in die Standardform ergibt sich als Differentialgleichung des gedämpften Systems

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega^2x = \omega_0^2x_0 \sin \Omega t \quad (2.76)$$

wobei wieder die Abkürzungen $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ und $2D\omega_0 = \frac{d}{m}$ verwendet wurden. Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung setzt sich wieder aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist aus Kapitel 1.2.2 bekannt:

$$x(t) = e^{-\delta t} B \cos(\omega_d t + \varphi) \quad (2.77)$$

mit den beiden frei wählbaren Konstanten B und φ , dem Abklingfaktor $\delta = D\omega_0$ und der Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - D^2}$. Dieser Teil der Lösung stellt die freie Schwingung dar, die durch die Störung des Gleichgewichts zu Anfang der Erregung angestoßen wird, und die bei einem gedämpften System im Verlaufe der Zeit mehr oder weniger schnell abklingt, abhängig von der Größe des Abklingfaktors. Wir interessieren uns nur für die stationäre Lösung bei andauernder harmonischer Erregung, d.h. für die erzwungene Schwingung, die wir als partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erhalten. Wegen des Geschwindigkeitsterms in der rechten Seite der Differentialgleichung wird der Lösungsansatz nach Art der rechten Seite nicht ausreichen, sondern wir müssen einen zweigliedrigen Lösungsansatz

$$x(t) = C_1 \sin \Omega t + C_2 \cos \Omega t \quad (2.78)$$

machen. Durch zweimaliges Ableiten und Einsetzen in die Differentialgleichung lässt sich zeigen, dass diese Funktion tatsächlich eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist, wenn die beiden Konstanten zu

$$C_1 = x_0 \frac{1 - \eta^2}{N(\eta, D)} \quad (2.79)$$

$$C_2 = x_0 \frac{-2D\eta}{N(\eta, D)} \quad (2.80)$$

gewählt werden, wobei $N(\eta, D) = (1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2$ als Abkürzung für den komplizierten Nenner eingeführt wurde.

Diese Lösung lässt sich auch in eine reine Sinusschwingung mit Phasenverschiebung umformen. Die stationäre Lösung für den Schwingweg des Einmassenschwingers bei harmonischer Krafterregung mit konstanter Kraftamplitude lautet dann:

$$x(t) = \hat{x} \sin(\Omega t + \varphi) \quad (2.81)$$

mit der Amplitude $\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{N(\eta, D)}}$ und dem Phasenwinkel $\varphi = \arctan\left(\frac{-2D\eta}{1-\eta^2}\right)$. Wir führen wieder den Begriff der Vergrößerungsfunktion für das Verhältnis der dynamischen Schwingwegamplitude \hat{x} zur statischen Auslenkung der Feder unter der Erregerkraft ein. Beim gedämpften System ist die Vergrößerungsfunktion eine Funktion der Frequenz und der Dämpfung:

$$V_1(\eta, D) = \frac{\hat{x}}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{N(\eta, D)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (2.82)$$

Man erkennt, dass die Vergrößerungsfunktion des gedämpften Schwingers für keine Frequenz ∞ wird, da für $D > 0$ der zweite Term im Nenner stets positiv ist, während der erste nie negativ werden kann. Der Nenner ist also stets positiv. Das Maximum der Vergrößerungsfunktion für einen festen Dämpfungswert tritt bei der Frequenz auf, bei der der Nenner ein Minimum hat. Dafür ist

$$\frac{\partial N(\eta, D)}{\partial \eta} = 0 \quad (2.83)$$

eine notwendige Bedingung. Die naheliegende Vermutung, dass das Maximum bei Erregung in der Eigenfrequenz des gedämpften Systems $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-D^2}$, das heißt bei $\eta_d = \sqrt{1-D^2}$ auftritt, erweist sich als nicht richtig. Vielmehr nimmt die Vergrößerungsfunktion für $\eta_{max} = \sqrt{1-2D^2}$ ihren Maximalwert V_{1max} an. Der Phasenwinkel zwischen dem sinusförmigen Kraft-Zeit-Verlauf und dem sinusförmigen Weg-Zeit-Verlauf ist ebenfalls eine Funktion der Frequenz und der Dämpfung. Um sich ein Bild dieser Zusammenhänge zu machen ist es zweckmäßig, zunächst eine kleine Wertetabelle anzulegen. Die Schwinggeschwindigkeit bei stationärer harmonischer Krafterregung erhält man durch Ableiten des Weg-Zeit-Verlaufs zu:

$$v(t) = \dot{x}(t) = x_0 \frac{\Omega \cos(\Omega t + \varphi)}{\sqrt{N(\eta, D)}} \quad (2.84)$$

mit

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-2D\eta}{1-\eta^2}\right) \quad (2.85)$$

Nach einer Umformung auf die Sinusfunktion der Erregerkraft ergibt sich

$$v(t) = v_0 \frac{\sin(\Omega t + \varphi + \pi/2)\eta}{\sqrt{N(\eta, D)}} \quad (2.86)$$

wobei $v_0 = x_0\omega_0$ als Bezugsgeschwindigkeit gewählt wurde. Das ist eine Funktion der Art $v(t) = \hat{v} \sin(\Omega t + \varphi)$ mit der Amplitude $\hat{v} = v_0 \frac{\eta}{\sqrt{N(\eta, D)}}$ und dem Phasenwinkel $\varphi_2 = \varphi + \frac{\pi}{2}$. Auch für die Schwinggeschwindigkeit lässt sich die Abhängigkeit der Amplitude von der Frequenz und der Dämpfung über eine Vergrößerungsfunktion beschreiben:

$$V_2(\eta, D) = \frac{\hat{v}}{v_0} = \frac{\eta}{\sqrt{N(\eta, D)}} = \frac{\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (2.87)$$

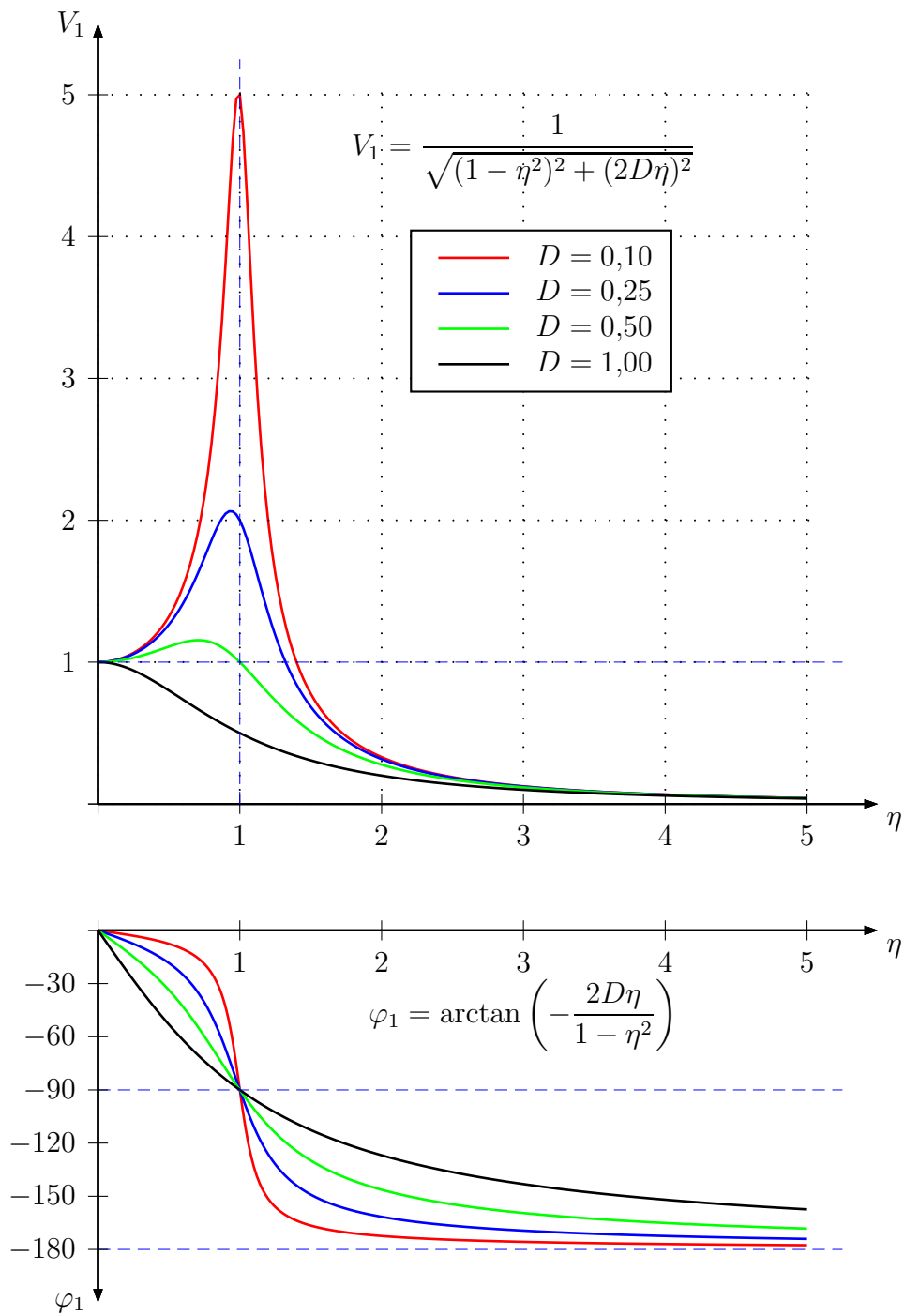


Bild 2.12: Vergrößerungsfunktion und Phasenwinkel des Weges bei harmonischer Krafterregung

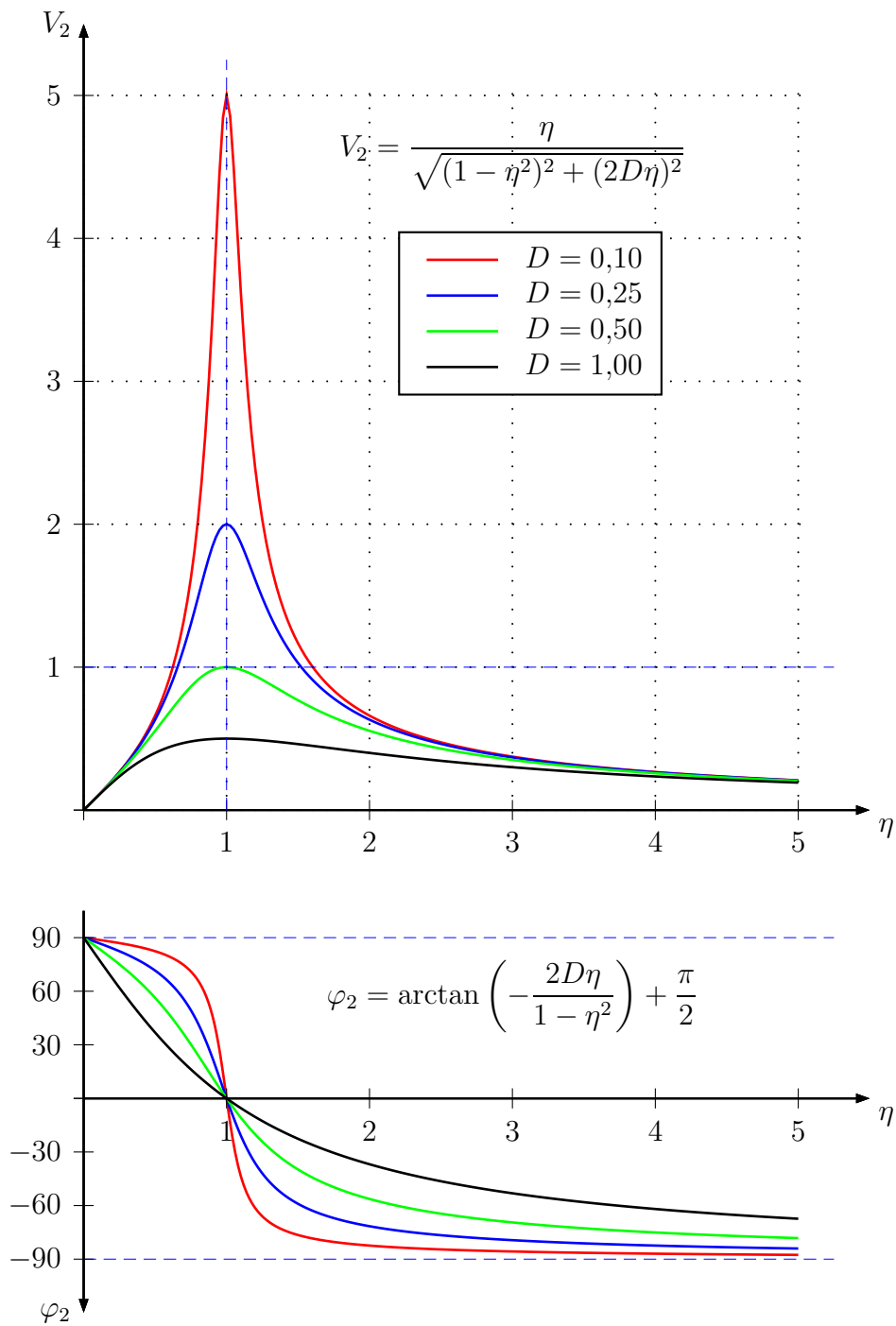


Bild 2.13: Vergrößerungsfunktion und Phasenwinkel der Geschwindigkeit bei harmonischer Krafterregung

Die Schwingbeschleunigung bei stationärer harmonischer Krafterregung erhält man durch Ableiten des Geschwindigkeits-Zeit-Verlaufs zu:

$$a(t) = \dot{v}(t) = v_0 \frac{\Omega \cos(\Omega t + \varphi_2) \eta}{\sqrt{N(\eta, D)}} \quad (2.88)$$

Nach einer Umformung auf die Sinusfunktion der Erregerkraft ergibt sich diesmal:

$$a(t) = a_0 \frac{\sin(\Omega t + \varphi + \pi) \eta^2}{\sqrt{N(\eta, D)}} \quad (2.89)$$

wobei $a_0 = v_0 \omega_0 = x_0 \omega_0^2$ als Bezugsbeschleunigung gewählt wurde. Das ist eine Funktion der Art $a(t) = \hat{a} \sin(\Omega t + \varphi_3)$ mit der Amplitude $\hat{a} = a_0 \frac{\eta^2}{\sqrt{N(\eta, D)}}$ und dem Phasenwinkel $\varphi_3 = \varphi + \pi$. Wie für den Schwingweg und die Schwinggeschwindigkeit lässt sich die Abhängigkeit der Amplitude von der Frequenz und der Dämpfung über eine dritte Vergrößerungsfunktion beschreiben:

$$V_3(\eta, D) = \hat{a} a_0 = \frac{\eta^2}{\sqrt{N(\eta, D)}} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (2.90)$$

2.4.2 Unwuchterregung

Die Unwuchterregung ist die am häufigsten auftretende Form der harmonischen Erregung. Trotz größter Sorgfalt lässt sich kein drehendes Bauteil so vollkommen fertigen und montieren, dass der Schwerpunkt genau im Durchstoßpunkt der Drehachse liegt. Schnell drehende Teile müssen deshalb nach der Montage zusammen mit der Welle ausgewuchtet werden. Das Auswuchten (oder kurz: das Wuchten) ist ein Vorgang, bei dem durch Messung der Lagerreaktionskräfte im Betrieb die Fliehkräfte des unwuchtigen Bauteils und damit Anbringensort und Größe der erforderlichen Ausgleichsgewichte ermittelt werden. Die erforderliche Wuchtgenauigkeit wächst, wie die Fliehkraft, mit der Betriebsdrehzahl des Bauteils (und zwar quadratisch). Die Unwuchterregung wird auch für Schwingungsuntersuchungen gerne verwendet, vor allem wenn es sich bei den zu untersuchenden Strukturen um große Maschinen und Anlagen handelt. Dazu verwendet man Unwuchterreger (Shaker), bei denen zwei gegenläufig rotierende Unwuchtscheiben eine gerichtete sinusförmige Kraft $F = m_u r_u \Omega^2 \sin \Omega t$ erzeugen. Wenn wir diese Kraft und das gleiche Modell verwenden, das bei der harmonischen Krafterregung betrachtet wurde, erhalten wir eine Schwingungsgleichung, bei der sich lediglich die rechte Seite geändert hat:

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = m_u r_u \Omega^2 \sin \Omega t \quad (2.91)$$

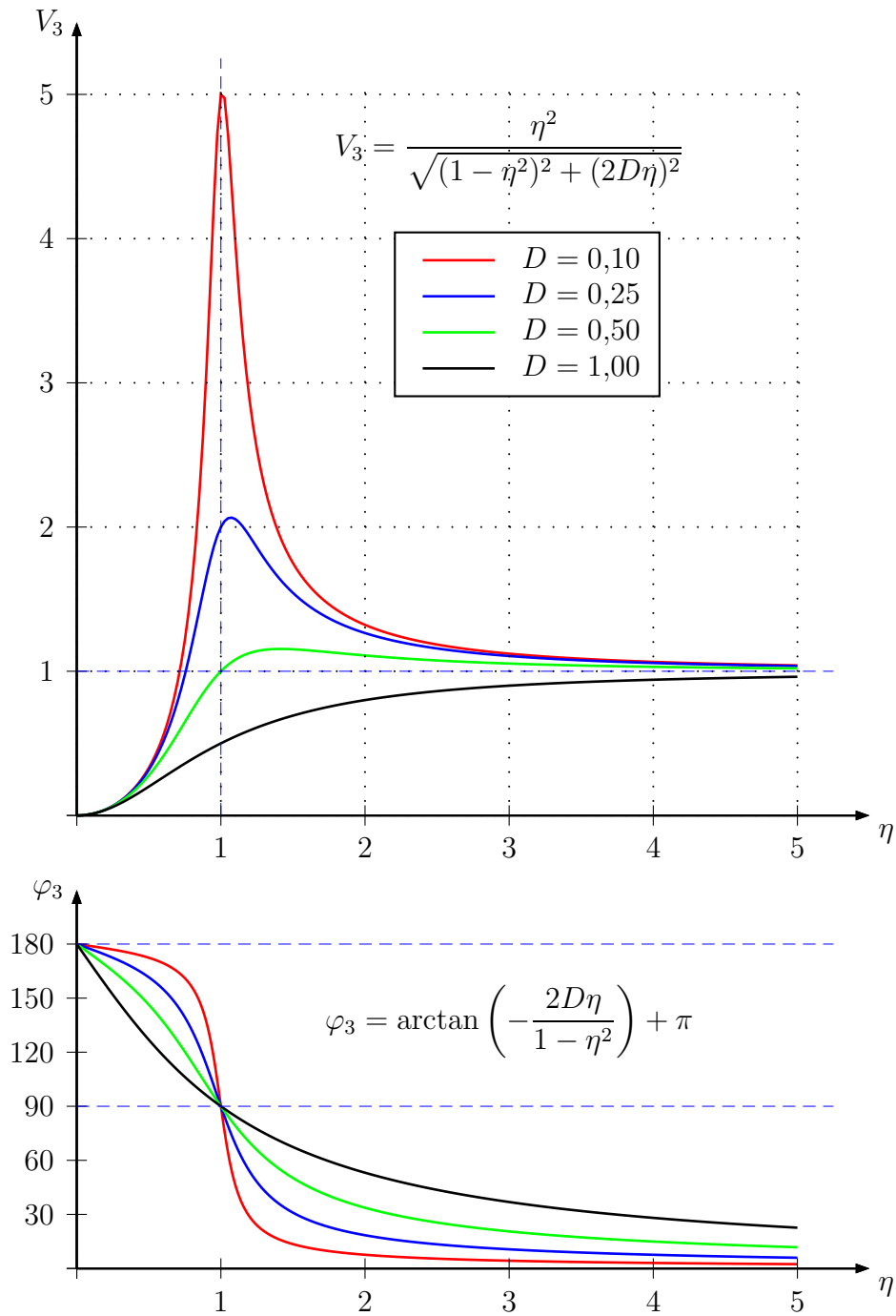


Bild 2.14: Vergrößerungsfunktion und Phasenwinkel der Beschleunigung bei harmonischer Krafterregung

Nach Division durch m und mit der üblichen Einführung der Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems und des Lehrschen Dämpfungsmaßes wird dann

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} = \varepsilon\Omega^2 \sin \Omega t \quad (2.92)$$

wobei

$$\varepsilon = r_u \frac{m_u}{m} \quad (2.93)$$

die Exzentrizität des Schwerpunkts des Drehteils bezüglich der Drehachse bedeutet. Häufig wird bei rotierenden Teilen die Größe der Unwucht in μm angegeben. Dann ist mit dieser Angabe die Exzentrizität gemeint. Wir interessieren uns nur für die stationären erzwungenen Schwingungen, die sich nach Abklingen der freien Schwingungen (auf Grund irgendwelcher Störungen beim Anfahren einer konstanten Drehzahl) einstellen, d.h. es interessiert nur die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Wie bei der harmonischen Krafterregung führt der Ansatz

$$x(t) = C_1 \sin \Omega t + C_2 \cos \Omega t \quad (2.94)$$

zum Erfolg. Für die beiden Konstanten ergibt sich diesmal

$$C_1 = \varepsilon \frac{\eta^2(1 - \eta^2)}{N(\eta, D)} \quad (2.95)$$

$$C_2 = -\varepsilon \frac{2D\eta^3}{N(\eta, D)} \quad (2.96)$$

wobei wieder der gleiche komplizierte Nenner durch $N(\eta, D)$ abgekürzt wurde. Als reine Sinusschwingung mit Phasenverschiebung geschrieben ergibt sich somit für den stationären Schwingweg bei einer Unwuchterregung

$$x(t) = \hat{x} \sin(\Omega t + \varphi) \quad (2.97)$$

mit $\hat{x} = \varepsilon \frac{\eta^2}{\sqrt{N(\eta, D)}}$ und $\varphi = \arctan\left(\frac{-2D\eta}{1-\eta^2}\right)$ wobei $N(\eta, D) = (1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2$ ist. Definieren wir in diesem Fall die Vergrößerungsfunktion des Schwingers als dynamische Amplitude durch die Exzentrizität, so ergibt sich die Funktion

$$V_4(\eta, D) = V_3(\eta, D) = \frac{\hat{x}}{\varepsilon} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (2.98)$$

die wir von der Schwingungsbeschleunigung bei harmonischer Krafterregung kennen. Die Phasenverschiebung zwischen dem Schwingweg und der Unwuchtkraft ist dagegen genau die gleiche, wie bei Krafterregung:

$$\varphi_4 = \varphi_1 = \arctan\left(\frac{-2D\eta}{1 - \eta^2}\right) \quad (2.99)$$

Für die Schwinggeschwindigkeit bei Unwuchterregung ergibt sich mit der Bezugsgeschwindigkeit $v_0 = \varepsilon\omega_0$ die Amplitude zu

$$\hat{v} = v_0 \frac{\eta^3}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (2.100)$$

sodass die Vergrößerungsfunktion für die Schwinggeschwindigkeit

$$V_5(\eta, D) = \frac{\hat{v}}{v_0} = \frac{\eta^3}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (2.101)$$

wird. Wegen der dritten Potenz von η im Zähler geht diese Funktion für $\eta \rightarrow \infty$ nicht gegen einen konstanten Wert, sondern gegen eine Gerade durch den Ursprung mit der Steigung 1. Die Schwinggeschwindigkeitsamplitude wächst also bei Unwuchterregung im überkritischen Bereich linear mit der Frequenz der Erregung. Für die Schwingbeschleunigung bei Unwuchterregung ergibt sich mit der Bezugsbeschleunigung $a_0 = \varepsilon\omega_0^2$ die Amplitude zu

$$\hat{a} = a_0 \frac{\eta^4}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (2.102)$$

sodass die Vergrößerungsfunktion für die Schwingbeschleunigung

$$V_6(\eta, D) = \frac{\hat{a}}{a_0} = \frac{\eta^4}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (2.103)$$

wird. Wegen der vierten Potenz von η im Zähler geht diese Funktion für $\eta \rightarrow \infty$ gegen eine Normalparabel. Die Schwingbeschleunigungsamplitude wächst also bei Unwuchterregung im überkritischen Bereich quadratisch mit der Frequenz der Erregung.

2.4.3 Fußpunkterregung

Bei der Fußpunkterregung wird die schwingungsfähige Masse nicht direkt durch Kräfte angeregt. Die Schwingungserregung erfolgt indirekt durch eine (harmonische) Bewegung des bisher als Festpunkt behandelten Anlenkpunktes der Feder des Feder-Masse-Systems. Eine derartige Fußpunkterregung erfahren z.B. Maschinenteile, die an schwingende Bauteile oder Maschinenrahmen angeschlossen sind. Weitere Beispiele sind die Schwingungsanregung von Gebäuden und der darin befindlichen Maschinen und Anlagen bei Erdbeben oder die Anregung durch die von anderen Maschinen, die keine ausreichende Schwingungsisolation besitzen, ausgehenden Körperschallwellen im Fußboden einer Werkshalle. Bei unserem Modell zur Untersuchung der Eigenschaften fußpunkterregter Schwingungen (Masseklotz auf glatter Unterlage, lineare Feder, linearer Dämpfer) müssen wir außer der Koordinate x zur Beschreibung der Bewegung der Masse eine zweite Koordinate x_f für die harmonische Fußpunktbewegung einführen:

$$x_f = x_0 \sin \Omega t \quad (2.104)$$

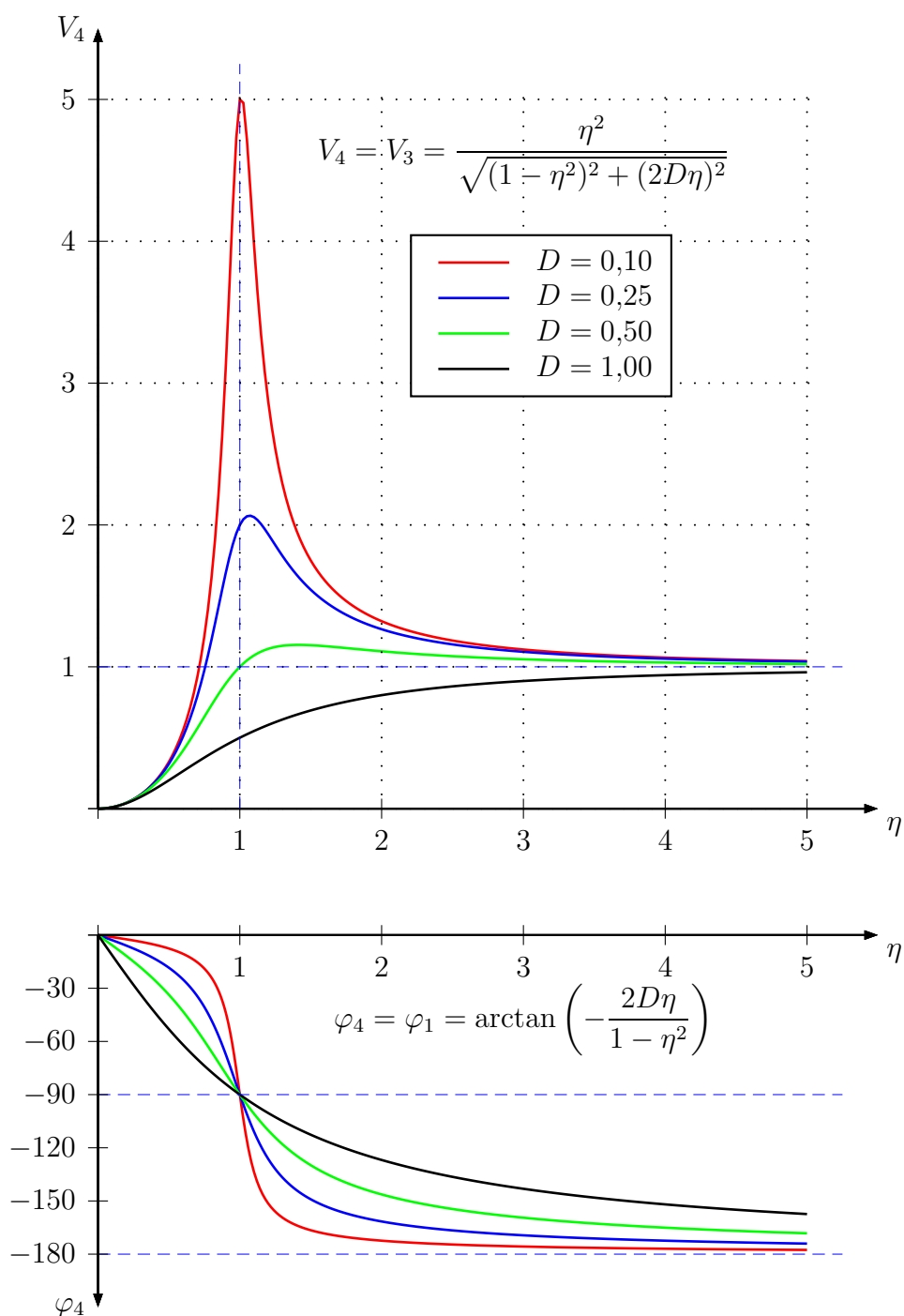


Bild 2.15: Vergrößerungsfunktion und Phasenwinkel des Weges bei Unwucherregung

Für $x = 0$ und $x_f = 0$ soll die Feder spannungsfrei sein. Der Impulssatz lässt sich für dieses System wie gewohnt in der Form

$$m\ddot{x} = -F_F - F_D \quad (2.105)$$

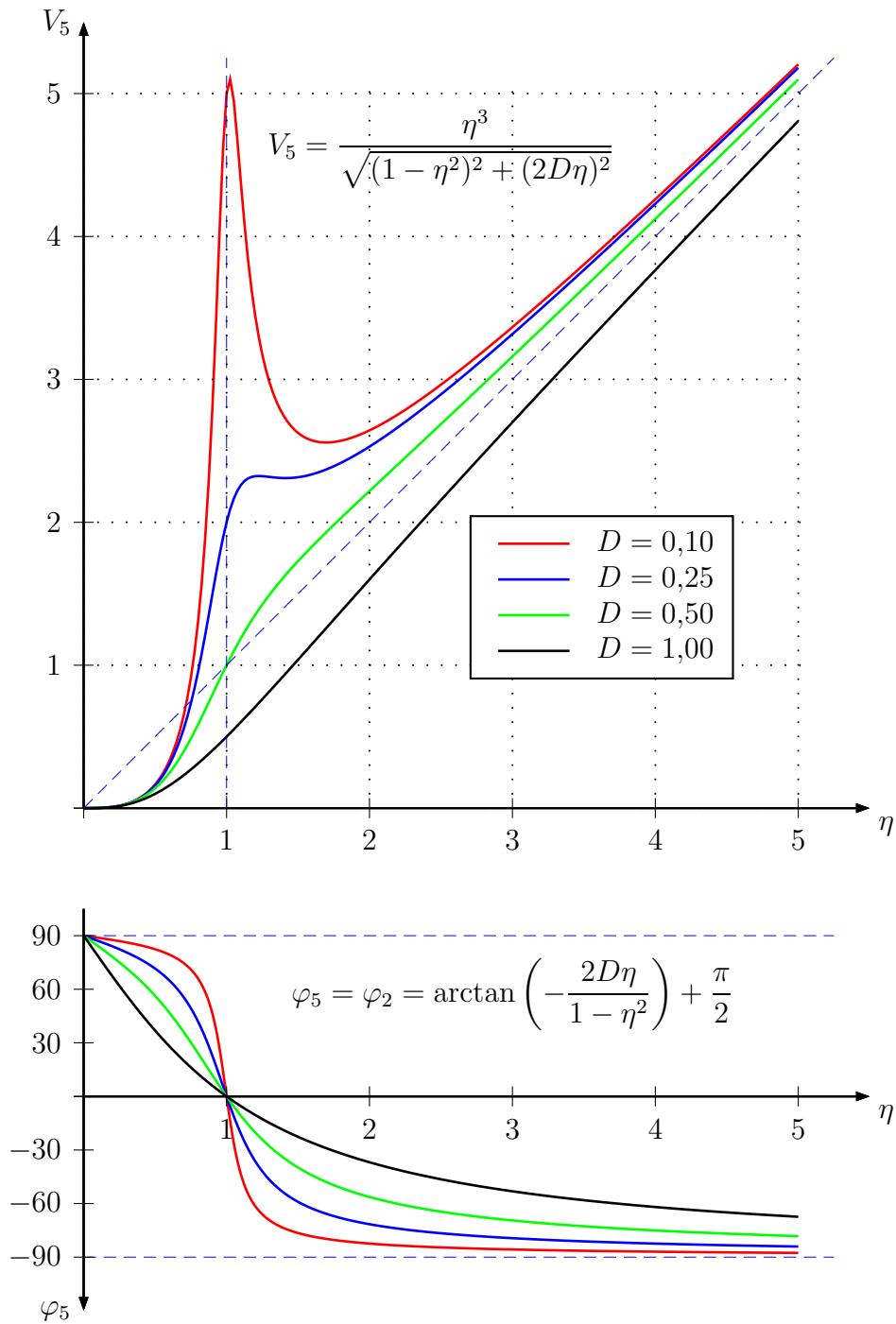


Bild 2.16: Vergrößerungsfunktion und Phasenwinkel der Geschwindigkeit bei Unwuchterregung

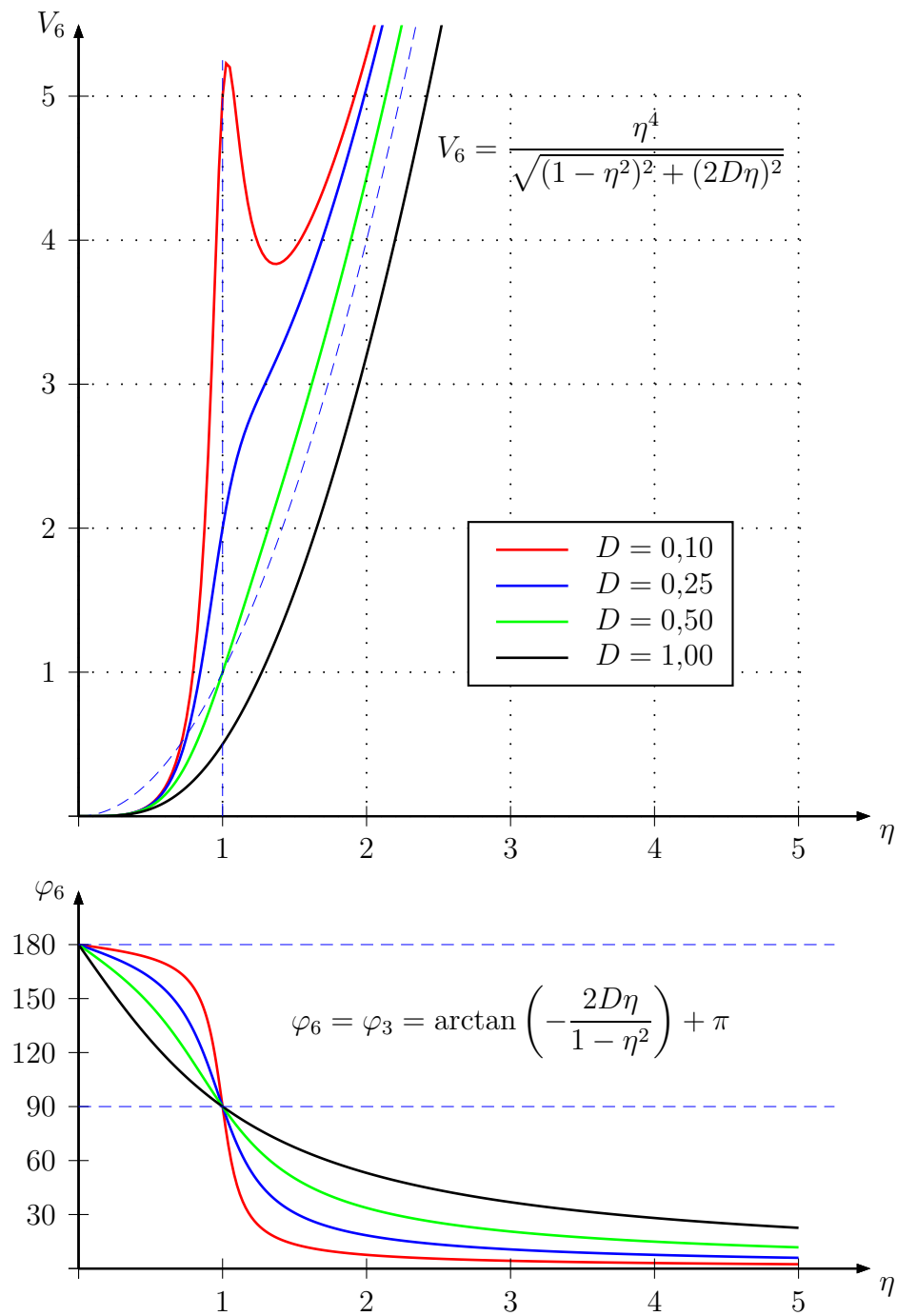


Bild 2.17: Vergrößerungsfunktion und Phasenwinkel der Beschleunigung bei Unwuchterregung

anschreiben, wobei sich aber die Federkraft aus dem Relativweg und die Dämpferkraft aus der Relativgeschwindigkeit zu

$$F_F = k(x - x_f) \quad (2.106)$$

$$F_D = d(\dot{x} - \dot{x}_f) \quad (2.107)$$

ergeben. Durch Einsetzen dieser beiden Beziehungen erhalten wir die Bewegungsgleichung in der Form

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = kx_f + d\dot{x}_f \quad (2.108)$$

oder

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = kx_0 \sin \Omega t + dx_0 \Omega \cos \Omega t \quad (2.109)$$

Logischerweise werden die freien Schwingungen durch eine andere Erregungsart nicht verändert, Das drückt sich darin aus, dass die linke Seite der Differentialgleichung in allen bisher betrachteten Fällen gleich ist. Wenn wir aber die erzwungenen Schwingungen untersuchen wollen, die als partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erscheinen, so ist es zweckmäßig, zunächst die Relativbewegung zwischen Fußpunkt und Masse zu betrachten:

$$x_r = x - x_f \quad (2.110)$$

$$\dot{x}_r = \dot{x} - \dot{x}_f \quad (2.111)$$

$$\ddot{x}_r = \ddot{x} - \ddot{x}_f \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{x}_r + \ddot{x}_f \quad (2.112)$$

Für die Relativbewegung lautet die Bewegungsgleichung folglich:

$$m\ddot{x}_r + d\dot{x}_r + kx_r = -m\ddot{x}_f = mx_0\Omega^2 \sin \Omega t \quad (2.113)$$

Nach Division durch m und mit den üblichen Abkürzungen wird daraus

$$\ddot{x}_r + 2D\omega_0\dot{x}_r + \omega_0^2 x_r = x_0\Omega^2 \sin \Omega t \quad (2.114)$$

Diese Gleichung stimmt genau mit der des unwuchterregten Schwingers überein. An Stelle der Exzentrizität ist lediglich die Amplitude der Fußpunktbewegung getreten. Die stationäre Lösung (für die erzwungenen Schwingungen) kann somit von dort übernommen werden:

$$x_r(t) = \hat{x}_r \sin(\Omega t + \varphi) \quad (2.115)$$

mit

$$\hat{x}_r = x_0 \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (2.116)$$

und

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-2D\eta}{1 - \eta^2}\right) \quad (2.117)$$

Die Vergrößerungsfunktion für die Relativbewegung des fußpunkterregten Schwingers ist dann

$$V_3(\eta, D) = \frac{\hat{x}_r}{x_0} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (2.118)$$

Die Relativbewegung des fußpunkterregten Schwingers ist gleich der Absolutbewegung des unwuchterregten Schwingers. Die Relativbewegung ist ein Maß für die dynamische Beanspruchung des fußpunkterregten Schwingers, da sie die elastische Verformung beschreibt. In manchen Fällen interessiert aber auch die Absolutbewegung, z.B. wenn es darum geht, die Schwingungsanregung von Sekundärsystemen zu beurteilen, die an der fußpunkterregten Struktur befestigt sind. Für diese stellt die Absolutbewegung wiederum eine Fußpunkterregung dar. Das macht natürlich nur Sinn, wenn das Sekundärsystem eine deutlich kleinere Masse als das Primärsystem und eine deutlich andere Eigenfrequenz besitzt, sodass seine Schwingungen keine wesentlichen Rückwirkungen auf das Primärsystem haben. Nur dann dürfen die beiden Strukturen als schwingungstechnisch entkoppelt betrachtet werden (sonst ist eine gekoppelte Betrachtung als Mehrmassensystem erforderlich). Die Absolutbewegung der Masse ergibt sich als Summe von Relativbewegung und Fußpunktbewegung:

$$x(t) = x_r(t) + x_f(t)$$

als

$$x(t) = \hat{x}_r \sin(\Omega t + \varphi) + x_0 \sin \Omega t$$

mit

$$\hat{x}_r = x_0 \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

und

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-2D\eta}{1 - \eta^2}\right)$$

Für $\eta \ll 1$, d.h. wenn die Erregerfrequenz sehr viel kleiner als die Eigenfrequenz des Schwingers ist, ist die Relativbewegung fast null und die Absolutbewegung ungefähr gleich der Fußpunkterregung. Der Schwinger macht also die Bewegung des Fußpunktes im wesentlichen mit. Die Feder verhält sich sehr steif. Für $\eta \gg 1$, d.h. wenn die Erregerfrequenz sehr viel größer

als die Eigenfrequenz des Schwingers ist, ist die Relativbewegung nur wenig größer als die Fußpunktbewegung und zu ihr in Gegenphase. Der Schwinger bleibt also, absolut gesehen, praktisch in Ruhe. Die Feder verhält sich sehr weich. Für $\eta \approx 1$, d.h. wenn die Erregerfrequenz ungefähr gleich der Eigenfrequenz des Schwingers ist, ist bei schwach gedämpften Systemen die Relativbewegung deutlich größer als die Fußpunktbewegung und der Phasenwinkel zwischen Fußpunktbewegung und Relativweg beträgt -90 Grad. Bei stark gedämpften Systemen ist dagegen selbst im Resonanzfall der Relativweg in derselben Größenordnung wie die Fußpunktbewegung. Zum Beispiel ist für eine Dämpfung von 25% die Amplitude des Relativweges gerade doppelt so groß wie die Amplitude der Fußpunktbewegung. Der Absolutweg ist in diesem Beispiel eine Sinusschwingung mit der Amplitude $\sqrt{5}x_0$ und einer Phasenverschiebung von ca. -63 Grad.

2.4.4 Allgemein periodische Erregung

Die bisher behandelte harmonische Erregung ist ein Sonderfall einer periodischen Erregung, bei der die Erregerfunktion eine reine Sinusschwingung konstanter Amplitude und fester Frequenz ist. Im allgemeinen Fall einer periodischen Erregung ist die Erregerfunktion innerhalb eines bestimmten Zeitabschnittes, der Periode T beliebig, um sich dann aber ständig zu wiederholen. Eine periodische Kraft ist also durch $F(t + T) = F(t)$ mit beliebigem t und festem T gekennzeichnet. Die nicht-harmonische periodische Erregung ist im Maschinenbau eine der wichtigsten Schwingungsanregungen. Sehr viele Maschinen besitzen Ungleichförmigkeitsgetriebe, in denen die Drehbewegung des Antriebsmotors in periodisch wiederkehrende, nicht-harmonische Translationsbewegungen umgesetzt wird, um bestimmte Funktionen eines Arbeitsprozesses zu erfüllen. Beispiele sind Kurbeltrieb und Ventiltrieb in Kolbenmotoren, Antriebe in Textil- und Verpackungsmaschinen usw. Die Aufgabe, die Antwort eines (linearen) Einmassenschwingers auf eine allgemeine periodische Erregung zu bestimmen, lässt sich auf die bereits gelöste Aufgabe zurückführen, seine Antwort auf eine harmonische Erregung zu ermitteln. Die Werkzeuge dazu sind die Überlagerungsmethode (die nur bei linearen Systemen anwendbar ist) und die Fourierreihenentwicklung periodischer Funktionen. Jede beliebige periodische Funktion der Periode T lässt sich in eine Fourierreihe entwickeln, die aus einem konstanten Anteil und aus Sinus- und Kosinusfunktionen der Grundkreisfrequenz $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ und deren Vielfachen $\Omega_n = \frac{2\pi n}{T}$ besteht. Beispielsweise kann die Funktion $F(t)$, für die $F(t + T) = F(t)$ gilt, als Fourierreihe

$$F(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n^s \sin(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n^c \cos(n\Omega t) \quad (2.119)$$

geschrieben werden. Selbstverständlich lässt sich diese Fourierreihe auch in eine reine Sinusreihe umwandeln, bei der die einzelnen Glieder allerdings unterschiedliche Phasenverschiebungen aufweisen können:

$$F(t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(n\Omega t + \gamma_n). \quad (2.120)$$

Ist die Funktion $F(t)$ für eine Periode $0 \leq t \leq T$ explizit gegeben, lassen sich die Koeffizienten der Fourierreihe wie folgt ermitteln:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt \quad (2.121a)$$

$$\left. \begin{aligned} F_n^s &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\Omega t) dt \\ F_n^c &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\Omega t) dt \end{aligned} \right\} \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.121b)$$

Die Antwortschwingung eines Einmassenschwingers auf eine allgemeine (nichtharmonische) periodische Erregung lässt sich durch folgende Vorgehensweise ermitteln;

- Bestimmung der Fourierkoeffizienten der periodischen Funktion, die Amplituden der harmonischen Bestandteile der Erregungsfunktion sind,
- Bestimmung der Schwingungsantwort des Einmassenschwingers auf jede einzelne dieser harmonischen Erregungen,
- Überlagerung der harmonischen Antwortschwingungen zur Schwingungsantwort auf die periodische Erregung.

Theoretisch sind dabei ∞ viele harmonische Anteile zu ermitteln und zu überlagern. Praktisch sind meist nur bestimmte Frequenzbereiche von Interesse. Zudem nimmt der Betrag der Koeffizienten mit wachsender Ordnung der Harmonischen meist schnell ab, sodass in der Regel bereits wenige Glieder der Fourierreihe genügen, um die periodische Funktion mit ausreichender Genauigkeit darzustellen.

Beispiel: Rechteckimpuls

Als Beispiel für eine periodische Erregerkraft-Zeit-Funktion betrachten wir einen periodisch wiederkehrenden Rechteckimpuls $F(t) = F_I$ für $0 \leq t \leq \Delta t$ $F(t) = 0$ für $\Delta t < t < T$ Die

Zahlenwerte für das Beispiel seien: $F_I = 1000N$, $\delta t = 0,3s$, $T = 1,2s$ Für diese Funktion müssen zunächst die Fourierkoeffizienten der Reihenentwicklung:

$$F(t) = F_0 + \sum F_n^s \sin(n\Omega t) + \sum F_n^c \cos(n\Omega t) \quad (2.122)$$

berechnet werden. Der konstante Anteil (Mittelwert) ergibt sich zu

$$F_0 = \int \frac{F(t)dt}{T} = \frac{F_I}{4} = 250N$$

Für die Sinuskoeffizienten wird

$$F_n^s = 2 \int \frac{F(t) \sin(n\Omega t) dt}{T} = 2F_I \int \frac{\sin(n\Omega t) dt}{T} \quad (2.123)$$

und damit

$$F_n^s = F_I \frac{1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} \quad (2.124)$$

oder

$$F_n^s = \frac{\alpha_n F_I}{\pi} \quad (2.125)$$

mit der Abkürzung

$$\alpha_n = 1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (2.126)$$

Die Kosinuskoeffizienten ergeben sich entsprechend zu

$$F_n^c = 2 \int \frac{F(t) \cos(n\Omega t) dt}{T} = 2F_I \int \frac{\cos(n\Omega t) dt}{T} \quad (2.127)$$

und damit

$$F_n^c = F_I \frac{1 - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} \quad (2.128)$$

oder

$$F_n^c = \frac{\beta_n F_I}{\pi} \quad (2.129)$$

mit der Abkürzung

$$\beta_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (2.130)$$

Der Anfang der Fourierentwicklung lautet dann:

$$\begin{aligned}
 F(t) = \frac{F_I}{4} + \frac{F_I}{\pi} & \left(\sin(\Omega t) + \cos(\Omega t) + \sin(2\Omega t) \right. & (2.131) \\
 & + \frac{\sin(3\Omega t)}{3} - \frac{\cos(3\Omega t)}{3} \\
 & + \frac{\sin(5\Omega t)}{5} + \frac{\cos(5\Omega t)}{5} + \frac{\sin(6\Omega t)}{3} \\
 & + \frac{\sin(7\Omega t)}{7} - \frac{\cos(7\Omega t)}{7} \\
 & + \frac{\sin(9\Omega t)}{9} + \frac{\cos(9\Omega t)}{9} + \frac{\sin(10\Omega t)}{5} \\
 & \left. + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Als reine Sinusreihe geschrieben wird daraus

$$\begin{aligned}
 F(t) = \frac{F_I}{4} + \frac{F_I}{\pi} & \left(\sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2} + \sin(2\Omega t) \right. & (2.132) \\
 & + \frac{\sin\left(3\Omega t - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2}}{3} \\
 & + \frac{\sin\left(5\Omega t + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2}}{5} + \frac{\sin(6\Omega t)}{3} \\
 & + \frac{\sin\left(7\Omega t - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2}}{7} \\
 & + \frac{\sin\left(9\Omega t + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2}}{9} + \frac{\sin(10\Omega t)}{5} \\
 & \left. + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Die Schwingungsantwort des Einmassenschwingers auf die periodische Erregung ergibt sich dann als Summe der Schwingungsantworten des Einmassenschwingers auf jede einzelne Komponente (harmonische Erregung) der Fourierreihenentwicklung:

$$x(t) = x_0 + \sum \hat{x}_n \sin(n\Omega t + \gamma_n + \varphi_n) \quad (2.133)$$

wobei

$$\hat{x}_n = x_n V_1(\eta_n) \quad (2.134)$$

$$\tan(\varphi_n) = -2D \frac{\eta_n}{1 - \eta_n^2} \quad (2.135)$$

$$x_n = \frac{F_n}{k} \quad (2.136)$$

$$\eta_n = n \frac{\Omega}{\omega_0} = n\eta_1 \quad (2.137)$$

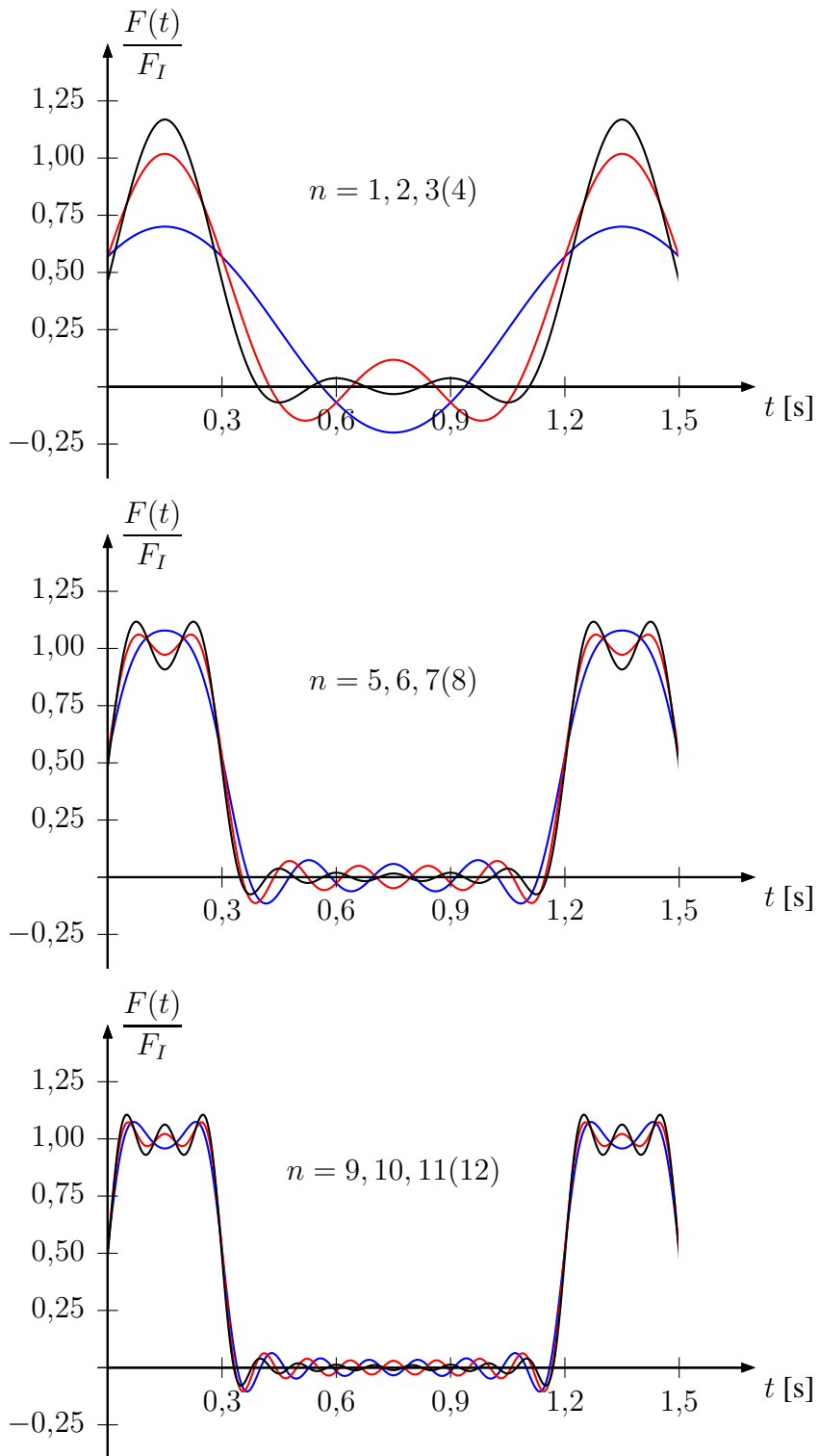


Bild 2.18: Fourierreihenentwicklung eines periodischen Rechteckimpuls für $n = 1$ bis $n = 12$ Reihenglieder

und

$$V_1(\eta_n) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta_n^2)^2 + (2D\eta_n)^2}} \quad (2.138)$$

die Vergrößerungsfunktion des harmonisch krafterregten Einmassenschwingers ist. Wenn der bisher betrachtete periodisch wiederkehrende Rechteckimpuls zum Beispiel auf einen Einmassenschwinger mit der Masse $m = 500\text{kg}$ und der Eigenfrequenz $f_0 = 2,5\text{Hz}$ einwirkt, dessen Dämpfung wir mit $D = 3\%$ annehmen, so liegt wegen

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 12,708\text{s}^{-1} \quad (2.139)$$

und damit

$$\eta_1 = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{1}{3}$$

der ungünstige Fall vor, dass die dreifache Grundfrequenz der Erregung, die sogenannte zweite Harmonische oder auch dritte Ordnung genau mit der Eigenfrequenz des Schwingers zusammenfällt, sodass für diese Komponente der Resonanzfall eintritt und die Vergrößerungsfunktion mit

$$V_1(\eta_3) = \frac{1}{2D} = 16,667 \quad (2.140)$$

sehr groß wird. Alle höheren Ordnungen des Schwingwegs sind dagegen klein und spielen keine Rolle mehr, es sei denn, dass es bei der Untersuchung nicht auf den Schwingweg, sondern auf die Schwingbeschleunigung ankommt. Deren Amplituden ergeben sich bekanntlich bei harmonischer Erregung zu

$$\hat{a}_n = \hat{x}_n(n\Omega)^2 \quad (2.141)$$

Das bedeutet, dass der Koeffizient der 10. Ordnung mit einem Faktor 100 gegenüber dem der 1. Ordnung bewertet wird, und deshalb im untersuchten Beispiel noch die gleiche Größenordnung hat wie dieser.

2.5 Stoßantwort

Wenn der Rechteckimpuls der Kraft aus dem vorigen Kapitel nicht periodisch wiederkehrt, sondern nur einmalig zur Zeit $t = 0$ einsetzt, liegt keine periodische Erregung vor, und es ist auch nicht möglich, die Kraft-Zeit-Funktion in eine Fourierreihe zu entwickeln. Wie reagiert

der Einmassenschwinger auf eine derartige einmalige Anregung, die als Rechteckstoß bezeichnet wird? Nach dem Newton'schen Bewegungsgesetz erfährt ein Körper bei Einwirkung einer Kraft eine Beschleunigung, und damit bei einem Rechteckstoß eine Geschwindigkeitsänderung, die proportional zur Größe der Kraft und zu deren Einwirkungsdauer, und umgekehrt proportional zur Masse des Körpers ist. Das Produkt aus Kraft und Einwirkungsdauer der Kraft bei einem Rechteckstoß wird als Kraftstoß oder Kraftimpuls bezeichnet. Bei kurz andauernden (d.h. stoßartigen) Belastungen, bei denen die Kraft nicht konstant ist, bezeichnet man so das Integral

$$\Delta p = \int F(t) dt \quad (2.142)$$

Wenn die Einwirkungsdauer der Kraft klein ist im Vergleich zur Periodendauer der Eigenschwingungen des Einmassenschwingers, so legt dieser während dieser Stoßzeit praktisch keinen Weg zurück, und erfährt daher aus der Ruhe eine Geschwindigkeitsänderung auf den Wert

$$v_0 = \frac{\Delta p}{m} \quad (2.143)$$

um anschließend freie Schwingungen um seine Gleichgewichtslage auszuführen. Die einsetzende Bewegung ist also bei sehr kurzer Einwirkungsdauer nicht vom Verlauf der Kraft-Zeit-Funktion während der Stoßdauer abhängig, sondern ausschließlich vom Kraftimpuls, der auf die Masse ausgeübt wird. Mathematisch kann man deshalb den Fall untersuchen, dass die Einwirkungsdauer gegen null geht, während die Kraft gleichzeitig so angehoben wird, dass der Kraftimpuls konstant bleibt. Das heißt, im Grenzfall wäre die Kraft für die Zeitdauer von 0 Sekunden unendlich groß.

Dieser Grenzfall eines unendlich kurzen, unendlich harten Stoßes wird nach dem britischen Kernphysiker Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), der ihn bei seinen Arbeiten zur Quantentheorie einführte, als Diracstoß bezeichnet. Beim Diracstoß ist $F(t) = \infty$ für $t = 0$, $F(t) = 0$ für $t \neq 0$ und $\int F(t) dt = \Delta p$. Wenn wir, um die Antwort eines Einmassenschwingers auf einen Diracstoß zu untersuchen, wieder das Modell des Klotzes auf glatter Unterlage verwenden, der über eine Feder und einen linearen, viskosen Dämpfer mit einer starren Wand verbunden ist, so erhalten wir für dessen Bewegung während aller Zeiten $t > 0$ die bekannte Differentialgleichung der freien, gedämpften Schwingungen

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0 \quad (2.144)$$



Paul Dirac (1902-1984)

deren allgemeine Lösung nach Kapitel 1.2.2

$$x(t) = e^{-\delta t} B \sin(\omega_d t + \varphi) \quad (2.145)$$

lautet, mit den Konstanten B (Anfangsamplitude) und φ (Phasenverschiebung), die aus den Anfangsbedingungen des jeweils gegebenen Problems zu bestimmen sind. Im Fall eines Diracstoßes zur Zeit $t = 0$ auf den ruhenden Schwinger lauten die Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0 \quad (2.146)$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = \frac{\Delta p}{m} \quad (2.147)$$

Daraus lassen sich die Konstanten B und φ zu $B = \frac{\Delta p}{m\omega_d}$ und $\varphi = 0$ ermitteln. In unserem Beispiel ist folglich die Stoßantwort des Schwingers durch

$$x(t) = e^{-\delta t} \sin \omega_d t \frac{\Delta p}{m\omega_d} \quad (2.148)$$

gegeben. Die auf einen Stoß folgende freie Schwingung klingt, je nach Größe der Abklingkonstante (alsoder Dämpfung), mehr oder weniger schnell ab. Wenn nun ein zweiter, gleicher Stoß erst dann erfolgt, wenn die Schwingungsantwort auf den ersten Stoß praktisch abgeklungen ist, gelten die gleichen Anfangsbedingungen wie beim ersten Stoß, und die einsetzende Bewegung wird genau gleich ablaufen wie beim ersten Mal. Wenn man sich also vorstellt, dass sich gleiche Stöße in gleichen, ausreichend langen Zeitabständen wiederholen, muss sich die Stoßantwort auch aus der periodischen Rechteckimpulsanregung herleiten lassen, die im vorhergehenden Kapitel untersucht wurde, wenn nur die Stoßdauer hinreichend klein und die Periode hinreichend groß gewählt wird. Wenn wir von demselben Einmassenschwinger ausgehen, der im vorhergehenden Kapitel untersucht wurde ($m = 500 \text{ kg}$, $k = 123370 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $D = 3\%$), und ihn einer gleichartigen periodischen Rechteckimpulserregung aussetzen, wobei aber die Stoßdauer zu $\Delta t = 0,03 \text{ s}$ (10 mal kleiner), und die Periode zu $T = 12 \text{ s}$ (10 mal größer) gewählt wird, so tritt der Fall ein, dass die Schwingungen auf Grund des vorhergehenden Stoßes zum Zeitpunkt des folgenden stoßes weitgehend abgeklungen sind (auf 0,35% der Anfangsamplitude). Zu Beginn jedes Stoßes der periodischen Erregung ist der Schwinger somit praktisch in Ruhe. Die Fourierreihenentwicklung dieser Kraft-Zeitfunktion führt genau wie früher auf die Fourierkoeffizienten.

$$F_n^s = \frac{\alpha_n F_I}{n \pi} \quad (2.149)$$

$$F_n^c = \frac{\beta_n [F_I]}{n \pi} \quad (2.150)$$

wobei die Argumente der Sinus- und Kosinusfunktionen in den Größen α_n und β_n um den Faktor 100 kleiner sind:

$$\alpha_n = 1 - \cos\left(n\frac{\pi}{200}\right) \quad (2.151)$$

$$\beta_n = \sin\left(n\frac{\pi}{200}\right) \quad (2.152)$$

Für die Darstellung als reine Sinusreihe ergeben sich die Amplituden zu

$$F_n = 2F_I \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{400}\right)}{n\pi} \quad (2.153)$$

oder

$$F_n = \frac{F_I}{200} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{400}\right)}{n\frac{\pi}{400}} \quad (2.154)$$

und für die Phasenverschiebungen folgt

$$\gamma_n = \frac{1 - n\pi}{200} \quad (2.155)$$

Wenn wir für diese Reihenentwicklung das Amplituden- und das Phasenspektrum zeichnen, so erhalten wir aus diesen beiden Spektren diejenigen des früheren Beispiels, wenn wir nur jeden hundertsten Wert betrachten. Ganz allgemein lässt sich sagen, dass periodische Stoßanregungen der Dauer und der Periode T Amplitudenspektren besitzen, deren Verlauf der Funktion $\sin \frac{x}{x}$ entspricht, wobei die Nullstellen den Frequenzabstand $f_b = \frac{1}{\Delta t}$ haben, und die Dichte der Spektrallinien, die sog. Auflösung (resolution) im Frequenzbereich, durch $\Delta f = \frac{1}{T}$ gegeben ist. Zurück zum einmaligen, nicht periodischen Stoßvorgang. Dessen Amplitudenspektrum lässt sich aus dem des periodischen Stoßvorgangs ableiten, indem man die Periode T gegen unendlich gehen lässt. Die Spektrallinien haben dann den Abstand null, und die Fourierkoeffizienten werden als Funktionen der Kreisfrequenz aus den Integralen

$$F^s(\Omega) = \int F(t) \cos \Omega t dt \quad (2.156)$$

$$F^c(\Omega) = \int F(t) \sin \Omega t dt \quad (2.157)$$

mit den Integrationsgrenzen $-\infty$ und $+\infty$ ermittelt. Der Frequenzbereich bis zur ersten Nullstelle des Amplitudenspektrums wird als Bandbreite der Stoßanregung bezeichnet. Ein einmaliger Stoß der Dauer Δt bewirkt demnach eine Schwingungsanregung, die einen um so breiteren Frequenzbereich umfaßt, d.h. die um so breitbandiger ist, je kürzer die Stoßzeit ist:

$$\Omega_b = \frac{2\pi}{\Delta T} \quad (2.158)$$

oder

$$f_b = \frac{1}{\Delta t} \quad (2.159)$$

Im theoretischen Grenzfall einer Stoßzeit null, also beim Dirac-Stoß, wird die Bandbreite unendlich groß. Ein Dirac-Stoß hat ein konstantes Amplitudenspektrum. Alle Frequenzen werden gleichermaßen angeregt.

Zusammenfassung und Schlußfolgerungen:

- Stöße sind geeignet, Systeme breitbandig anzuregen, das heißt (relativ) unabhängig von der Lage der Eigenfrequenzen des Systems.
- Aus diesem Grund muss bei der Konstruktion von Maschinen möglichst vermieden werden, dass im Betrieb harte Stöße auftreten, da sonst alle schwingungsfähigen Bauteile angeregt werden können. (Spiele vermeiden, Schrägverzahnung von Getrieben, ruckfreie Charakteristik bei Kurvengetrieben, ziehender Schnitt bei Trennvorgängen, usw).
- Andererseits lässt sich die große Bandbreite der Stoßanregung für experimentelle Schwingungsuntersuchungen ausnutzen, bei denen es darum geht, die Eigenfrequenzen und die zugehörigen Dämpfungswerte eines schwingungsfähigen Systems zu ermitteln (s. Kap. 3).

2.6 Beliebige Erregung

Bisher haben wir die Schwingungsantwort des Einmassenschwingers auf periodische Erregungen und auf stoßartige Erregungen untersucht. Unter den möglichen und bei praktischen Problemen auftretenden Schwingungsanregungen sind das zwei wichtige Sonderfälle. Neben diesen gibt es aber eine ganze Reihe von Erregungsfunktionen mit grundsätzlich anderen Charakteristiken. Zunächst kann man zwischen stationären und instationären Erregungen unterscheiden. Von stationärer Erregung spricht man, wenn diese ständig mit konstanter Intensität und mit gleichbleibendem Erregerspektrum andauert. Instationäre Erregung liegt vor, wenn eine Schwingungserregung entweder nur manchmal oder einmalig für eine endliche Zeitdauer erfolgt, oder wenn sie zwar ständig andauert, aber mit veränderlicher Intensität. Davon unabhängig kann zwischen deterministischen und stochastischen Erregungen unterschieden werden. Deterministisch wird eine Zeitfunktion genannt, deren Wert sich für jeden Zeitpunkt in Vergangenheit und Zukunft genau angeben lässt. Stochastisch heißt eine Zeitfunktion dann,

wenn die Werte der Funktion zum Teil oder überwiegend von zufälligen, d.h. nicht genau vorhersehbaren Einflussgrößen abhängen. Streng genommen sind die beim Betrieb von Maschinen, Anlagen und Fahrzeugen auftretenden Erregungs-Zeit-Funktionen nie vollkommen vorherzusehen und somit nicht deterministisch. Sie sind außerdem höchstens für eine begrenzte Zeit von gleichbleibender Intensität und somit nicht stationär im strengen Sinn. Dennoch muss in den meisten Fällen von derartigen Modellvorstellungen ausgegangen werden, um Vorhersagen zum Schwingungsverhalten einer Konstruktion im Betrieb überhaupt mit vernünftigem Aufwand an Zeit und Geld machen zu können. Außerdem zeigt die Erfahrung, dass sich mit solchen Vereinfachungen, wenn sie sinnvoll vorgenommen werden, praktisch brauchbare Ergebnisse gewinnen lassen.

2.6.1 Numerische Integration

Bei einer beliebigen, instationären Erregung von endlicher Dauer, einer sogenannten transienten Erregung, für die eine Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung nicht gefunden wird, ist eine näherungsweise numerische Lösung erforderlich. Das Prinzip jedes numerischen Verfahrens zur Lösung von Differentialgleichungen beruht darauf, von den differentiellen (unendlich kleinen) Größen wieder zu endlich großen Differenzen überzugehen, in dem man die (auch nur näherungsweise richtigen) Werte der Lösung in endlich großen Zeitschritten bestimmt, und dabei die Ableitungen (Differentialquotienten) in den Gleichungen durch Differenzenquotienten ersetzt. Ausgehend von einem bekannten Zustand des Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt (Auslenkung Geschwindigkeit) lässt sich dann der Zustand am Ende des Zeitschritts näherungsweise durch die Lösung algebraischer Gleichungen ermitteln.

2.6.2 Lösung durch Fouriertransformation

Ein anderer Weg zur Lösung der Schwingungsgleichung, der sowohl für eine transiente Erregung als auch für eine beliebige stationäre Erregung möglich ist, führt über eine Transformation aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich. Dort wird aus der Schwingungsdifferentialgleichung eine algebraische Gleichung, deren Lösung (nach der Rücktransformation in den Zeitbereich) die Lösung der Differentialgleichung darstellt. Dieses Verfahren wird in vielen Bereichen der Technik angewandt, bei denen Differentialgleichungen die physikalischen Zusammenhänge beschreiben, so z.B. in der Elektrotechnik, insbesondere in der Nachrichtentechnik, und in der Regeltechnik. Wir betrachten irgendein System, das einen Eingang $y(t)$ und einen Ausgang $x(t)$ besitzt. Bei einem System der Nachrichtentechnik könnte das beispielsweise eine Signalübertragungsstrecke sein, bei deren Durchlaufen das Eingangssignal $y(t)$ in einer

veränderten Form (abgeschwächt, verzerrt, zeitlich versetzt) am Ausgang als $x(t)$ erscheint. Bei einem Schwingungssystem kann das Eingangssignal $y(t)$ beispielsweise die Erregerkraft oder die Fußpunktbeschleunigung, und das Ausgangssignal der Schwingweg $x(t)$ sein. Ein Schwingungssystem ist ein lineares System, da zwischen dem Eingang $y(t)$ und dem Ausgang $x(t)$ mit seinen zeitlichen Ableitungen ein linearer Zusammenhang besteht, nämlich unsere bekannte Schwingungsdifferentialgleichung

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = y(t)$$

Für die Transformation einer Funktion aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich verwenden wir die Fourier-Transformation, die mit Hilfe des Fourier-Integrals

$$X(\Omega) = F\{x(t)\} = \int x(t)e^{-j\Omega t} dt \quad (2.160)$$

ausgeführt wird. Diese Transformation ist umkehrbar eindeutig, d.h. die Rücktransformation aus dem Frequenzbereich in den Zeitbereich ergibt wieder die ursprüngliche Zeitfunktion:

$$x(t) = F^{-1}\{X(\Omega)\} = \int X(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega \quad (2.161)$$

Die Fourier-Transformation ist ein Sonderfall der aus der Regelungstechnik bekannten Laplace-Transformation, bei dem das Argument der Exponentialfunktion rein imaginär ist. Die Fouriertransformation ist eine lineare Transformation, sodass

$$F\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = a_1F\{x_1(t)\} + a_2F\{x_2(t)\} \quad (2.162)$$

ist. Außerdem lässt sich zeigen, dass einer zeitlichen Ableitung der Funktion im Frequenzbereich eine Multiplikation mit $j\Omega$ entspricht:

$$F\{\dot{x}(t)\} = j\Omega F\{x(t)\} \quad (2.163)$$

Wenn man nun die Differentialgleichung des Einmassenschwingers in den Frequenzbereich transformiert, und die beiden obigen Eigenschaften der Fourier-Transformation anwendet, erhält man im Frequenzbereich als Zusammenhang zwischen Schwingweg und Erregung

$$X(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{-m\Omega^2 + jd\Omega + k} \quad (2.164)$$

Diejenige Funktion von Ω , mit der die Eingangsgröße $Y(\Omega)$ multipliziert werden muss, um die Ausgangsgröße $X(\Omega)$ zu erhalten, bezeichnet man als Übertragungsfunktion oder auch als Transferfunktion (transfer function) des Systems (dieser Begriff stammt offensichtlich aus

der Nachrichtentechnik). Die Übertragungsfunktion, die den Zusammenhang zwischen Erregungsfunktion und Schwingweg des Einmassenschwingers im Frequenzbereich beschreibt, ist folglich

$$H(\Omega) = \frac{1}{-m\Omega^2 + jd\Omega + k} \quad (2.165)$$

Die Vorgehensweise zur Ermittlung des Schwingwegs bei einer beliebigen Erregung kann dann wie folgt aussehen:

- Transformation der Erregungsfunktion in den Frequenzbereich
- Multiplikation mit der Übertragungsfunktion des Einmassenschwingers
- Rücktransformation auf diese Weise ermittelten Schwingwegs in den Zeitbereich,

Theoretisch ist damit jede beliebige Erreger-Zeit-Funktion abgehandelt. Praktisch lassen sich aber in vielen Anwendungsfällen die Fourier-Transformation und die Rücktransformation nicht analytisch, sondern nur numerisch durchführen, sodass häufig die numerische Integration der Bewegungsgleichungen im Zeitbereich der Transformationsmethode vorgezogen wird. Bei der Untersuchung der periodischen Erregung haben wir festgestellt, dass sich die Amplituden der einzelnen Frequenzanteile der Schwingungsantwort des Systems durch Multiplikation der jeweiligen Erregeramplitude (Betrag des Amplitudenspektrums) mit dem zu dieser Frequenz gehörigen Wert der Vergrößerungsfunktion ergaben. Damit liegt die Vermutung nahe, dass die Übertragungsfunktion in einem engen Zusammenhang mit der Vergrößerungsfunktion steht. Die Übertragungsfunktion ist eine komplexe Funktion. Die Vergrößerungsfunktion ist dagegen reell und enthält nur positive Werte. Wir bilden also den Betrag der Übertragungsfunktion, indem wir uns zunächst deren Real- und Imaginärteil verschaffen. Nach Einführung der früher verwendeten Abkürzungen für das Verhältnis zwischen Erregerkreisfrequenz und Eigenkreisfrequenz sowie für das Lehr'sche Dämpfungsmaß erhalten wir den Realteil zu

$$\Re\{H(\Omega)\} = \frac{1 - \eta^2}{kN(\eta, D)} \quad (2.166)$$

und den Imaginärteil zu

$$\Im\{H(\Omega)\} = \frac{-2D\eta}{kN(\eta, D)} \quad (2.167)$$

Der Betrag der Übertragungsfunktion des Einmassenschwingers ergibt sich folglich zu

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{kN(\eta, D)} = \frac{V_1(\eta, D)}{k} \quad (2.168)$$

Der Phasenwinkel der komplexen Größe $H(\Omega)$ wird

$$\tan(\varphi) = \frac{\Im\{H(\Omega)\}}{\Re\{H(\Omega)\}} \quad (2.169)$$

$$= \frac{-2D\eta}{1 - \eta^2} \quad (2.170)$$

Das heißt, wir erhalten beim Betrag ein um den konstanten Faktor $\frac{1}{k}$ verändertes Ergebnis, bei der Phase genau das gleiche Ergebnis wie früher. Bei einem Schwingungssystem verwendet man anstelle des Begriffs der Übertragungsfunktion häufig auch den Begriff komplexer Frequenzgang. Zur Darstellung des komplexen Frequenzgangs sind, neben der bisherigen Darstellung als Betrag und Phase über der Frequenz, noch zwei andere Darstellungsarten gebräuchlich:

- Darstellung von Realteil und Imaginärteil über der Frequenz
- Darstellung von Imaginärteil über dem Realteil (Nyquist-Diagramm), wobei allerdings die Information über die zugehörige Frequenz verlorengeht, weshalb diese Darstellungsart im allgemeinen nur in Verbindung mit einer der beiden anderen Darstellungsarten als Zusatzinformation verwendet wird.

3 Schwinger mit zwei und mehr gekoppelten Freiheitsgraden

Inhalt

3.1 Freie, ungedämpfte Schwingungen	82
3.2 Erzwungene Schwingungen des ungedämpften Systems	85
3.3 Schwach gedämpfte Systeme	88

Viele technischen Systeme lassen sich bezüglich ihres Schwingungsverhaltens weder mit dem Modell des Einmassenschwingers, noch mit dem des Schwingers mit kontinuierlich verteilter Masse und Steifigkeit vernünftig beschreiben. Nehmen wir z.B. eine Maschine mit rechteckiger Grundfläche, die an den 4 Ecken auf Federn gelagert ist. Selbst wenn an den Lagerstellen Führungen angebracht sind, die horizontale Verschiebungen und eine Verdrehung um die Hochachse verhindern, hat die als starres Gebilde betrachtete Maschine immer noch 3 Freiheitsgrade der Bewegung: einen der Vertikalverschiebung (Hubbewegung) und zwei Drehfreiheitsgrade um die Längs- und die Querachse (Kippbewegungen). Nur wenn der Schwerpunkt der Maschine sich genau zentrisch zwischen den Lagern befindet, wird eine reine Hubbewegung möglich sein. Bei exzentrischem Schwerpunkt ist jede Hubbewegung, wegen der unterschiedlichen Hebelarme der Federkräfte und dem daraus resultierenden Drehmoment, mit einer Drehbewegung verbunden, sodass die Maschine gekoppelte Hub-Kipp-Schwingungen ausführen wird. Bei den folgenden Untersuchungen verwenden wir bei Modellen und Beispielen stets den Zweimassenschwinger. Die in Form von Matrixgleichungen aufgestellten Beziehungen gelten aber für Schwinger mit einer beliebig großen Zahl von Freiheitsgraden.

3.1 Freie, ungedämpfte Schwingungen

Beim Aufbau eines Schwingungsmodells gehen wir von dem Masseklotz auf glatter Unterlage aus, der über eine Feder an eine starre Wand gefesselt ist. An diesem Klotz sei über eine zweite Feder ein zweiter Masseklotz angekoppelt. Das System soll in der skizzierten Lage im Gleichgewicht sein, d.h. beide Federn sind spannungsfrei. Um das Schwingungsverhalten dieses Systems nach einer Störung seines Gleichgewichts zu untersuchen, betrachten wir die freigemachten Massen in einer ausgelenkten Lage, bei der zweckmäßigerweise beide Federn unter Zug stehen (d.h. die Auslenkung der zweiten Masse wird größer angenommen, als die der ersten). Die Impulssätze für die beiden Massen lauten:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \quad (3.1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) \quad (3.2)$$

oder:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \quad (3.3)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \quad (3.4)$$

Die beiden Impulssätze lassen sich in eine Matrixgleichung zusammenfassen:

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (3.5)$$

Dabei nennt man die M Massenmatrix, K die Steifigkeitsmatrix und x den Verschiebungsvektor des Schwingungssystems. Auf der rechten Seite des homogenen Differentialgleichungssystems steht in dieser Schreibweise der Nullvektor. Analog zur Vorgehensweise beim Einmassenschwinger probiert man den Lösungsansatz $x = u \sin \omega t$ und erhält ein homogenes lineares Gleichungssystem für den Amplitudenvektor u : $(-\omega^2 M + K)u = 0$ das nur dann nichttriviale Lösungen besitzt, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet. Diese Bedingung führt auf eine biquadratische Gleichung für

$$\omega^4 - \omega^2(\omega_{01}^2 + (1 + \mu)\omega_{02}^2) + \omega_{01}^2\omega_{02}^2 = 0 \quad (3.6)$$

wobei $\omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$, $\omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ die Eigenkreisfrequenzen der beiden entkoppelten Einmassenschwinger und $\mu = \frac{m_2}{m_1}$ deren Massenverhältnis bedeutet. Die Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$\omega_1^2 = \frac{\omega_{01}^2 + (1 + \mu)\omega_{02}^2}{2} - \sqrt{\frac{\omega_{01}^2 + (1 + \mu)\omega_{02}^2}{4} - \omega_{01}^2\omega_{02}^2} \quad (3.7)$$

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_{01}^2 + (1 + \mu)\omega_{02}^2}{2} + \sqrt{\frac{\omega_{01}^2 + (1 + \mu)\omega_{02}^2}{4} - \omega_{01}^2\omega_{02}^2} \quad (3.8)$$

sind die Quadrate der beiden Eigenkreisfrequenzen des gekoppelten Schwingungssystems.

Sonderfall: Homogener Zweimassenschwinger Von einem homogenen Schwinger spricht man, wenn alle Massen und alle Federn gleich sind. Beim Zweimassenschwinger bedeutet das $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$ und $\mu = 1$. Dann wird

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = 0,618\omega_0 \quad (3.9)$$

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = 1,618\omega_0 \quad (3.10)$$

Die Lösungen des homogenen Gleichungssystems zu den Eigenkreisfrequenzen sind die Eigenschwingungsformen des Systems. Die Lösungen müssen existieren, sind aber jeweils nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Bei der Eigenkreisfrequenz ω_1 lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -\omega_1^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega_1^2 m_2 + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt beispielsweise

$$u_{12} = \frac{u_{11} k_2}{k_2 - \omega_1^2 m_2} = \frac{u_{11}}{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}} \quad (3.11)$$

wobei u_{11} eine beliebige Konstante ist. Die erste Gleichung würde auf das gleiche Ergebnis führen. Die Eigenschwingungsformen werden durch die Eigenvektoren beschrieben, deren Komponenten die Amplituden der Schwingwege der Massen bei den betreffenden Eigenkreisfrequenzen sind:

$$\bar{\Phi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}} \end{pmatrix} u_{11} \quad \text{und} \quad \bar{\Phi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}} \end{pmatrix} u_{21}$$

Die Eigenvektoren von Mehrfreiheitsgradsystemen haben Orthogonalitätseigenschaften, die insbesondere für dynamische FE-Berechnungen eine große Rolle spielen, da sie sich für Berechnungsweisen ausnutzen lassen, die in vielen Fällen den Berechnungsaufwand erheblich verringern. 1) Die Eigenvektoren sind M -orthogonal. das heißt:

$$\bar{\Phi}_i^T \bar{M} \bar{\Phi}_j = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \text{const.} \neq 0 & \text{für } i = j \end{cases} \quad (3.12)$$

Da die Eigenvektoren nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt sind, kann man sogar normieren:

$$\bar{\Phi}_i^T \bar{M} \bar{\Phi}_j = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ m_0 u_0^2 \neq 0 & \text{für } i = j \end{cases} \quad (3.13)$$

Häufig werden die Eigenvektoren als Spaltenvektoren in eine Matrix zusammengefasst:

$$\bar{\Phi} = \{\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2, \dots, \bar{\Phi}_n\} \quad (3.14)$$

2) Die Eigenvektoren sind auch K -orthogonal. Das lässt sich leicht aus der ersten Orthogonalitätseigenschaft folgern:

$$(-\omega_j^2 \bar{M} + \bar{K})\bar{\Phi}_j = 0 \Rightarrow \bar{K}\bar{\Phi}_j = \omega_j^2 \bar{M}\bar{\Phi}_j \quad (3.15)$$

$$\bar{\Phi}_j^T \bar{K} \bar{\Phi}_j = \omega_j^2 \bar{\Phi}_j^T \bar{M} \bar{\Phi}_j \quad (3.16)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \omega_j^2 m_0 u_0^2 & \text{für } i = j \end{cases} \quad (3.17)$$

Für die Matrix der Eigenvektoren gilt dann:

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda m_0 u_0^2 \quad (3.18)$$

wobei Λ die Diagonalmatrix der Eigenkreisfrequenzquadrate ist:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Mit dem Wissen um diese Orthogonalitätseigenschaften der Eigenvektoren lässt sich das Problem des Mehrmassenschwingers mit N Freiheitsgraden auf N Probleme für Einmassenschwinger zurückführen, das heißt auf Aufgaben, die wesentlich leichter zu lösen sind. Zum Verständnis der Vorgehensweise sind die folgenden Überlegungen wichtig. Wir haben vorne die Verschiebungen der beiden Massen unseres Zweimassenschwingers in einen Vektor zusammengefasst. Das geschah zunächst rein formal, als bequeme Schreibweise. Genauso wie zwei Ortsvektoren, die nicht zusammenfallen, eine Ebene aufspannen, bzw. drei Ortsvektoren, die nicht in einer Ebene liegen, den dreidimensionalen Raum aufspannen, kann man sagen, dass die N Bewegungsfreiheitsgrade (Verschiebungen und Verdrehungen) eines Mehrmassenschwingers einen N -dimensionalen Raum aufspannen, den Zustandsraum des Schwingungssystems. Jeder momentane Zustand des Systems mit festen Werten der Verschiebungen und Verdrehungen, stellt einen Punkt in diesem Zustandsraum dar. Dem Gleichgewichtszustand des Systems ist der Ursprung im Zustandsraum zugeordnet. Eine Schwingbewegung ist eine Raumkurve im Zustandsraum. Der Schwingbewegung in einer Eigenschwingungsform entspricht eine Gerade durch den Ursprung. Der Richtungsvektor dieser Geraden ist der zugehörige normierte Eigenvektor. So wie wir in der Ebene oder im Raum den Ort eines Punktes in verschiedenen Koordinatensystemen eindeutig beschreiben können (Koordinatentransformation), lässt sich auch der momentane Zustand eines Mehrmassenschwingers eindeutig beschreiben, wenn als Koordinatensystem nicht die Bewegungsfreiheitsgrade, sondern die Eigenvektoren verwendet werden. Die Eigenvektoren spannen, auf Grund ihrer Orthogonalität, den gesamten Zustandsraum auf.

3.2 Erzwungene Schwingungen des ungedämpften Systems

3.2.1 Periodische Erregung

Wir betrachten zunächst den Fall der harmonischen Erregung. Harmonische Erregung bedeutet, dass die Anregungs-Zeit-Funktion eine reine, einfrequente Sinusfunktion ist, bei einer Krafterregung also ein Kraftvektor mit sinusförmig veränderlicher Größe:

$$F(t) = \hat{F} \sin \Omega t \quad (3.20)$$

Die Schwingungsgleichungen eines Mehrmassenschwingers lassen sich mit Hilfe der Matrixschreibweise formal genau gleich wie beim Einmassenschwinger als

$$M\ddot{x} + Kx = F(t) = \hat{F} \sin \Omega t \quad (3.21)$$

angeben. Der Lösungsansatz für die stationären Antwortschwingungen, die sich ergeben, wenn die durch die Anfangsstörung angeregten freien Schwingungen des Systems abgeklungen sind (durch sehr schwache Dämpfung des Systems, die für die übrigen Betrachtungen vernachlässigt wird), lautet

$$x(t) = \hat{x} \sin \Omega t \quad (3.22)$$

Einsetzen in die Schwingungsgleichung liefert:

$$(-\Omega^2 M + K)\hat{x} = \hat{F} \quad (3.23)$$

Dies ist aber nicht, wie beim Einmassenschwinger, eine-einfach zu lösende Gleichung, sondern ein inhomogenes lineares Gleichungssystem, dessen Lösung sich formal in der Form

$$\hat{x} = (-\Omega^2 M + K)^{-1} \hat{F} \quad (3.24)$$

anschreiben lässt, d.h. durch Multiplikation des Kraftamplitudenvektors mit der Inversen der Koeffizientenmatrix. Wie wir im vorigen Kapitel festgestellt haben, hat die Determinante dieser Koeffizientenmatrix bei einem Zweimassenschwinger zwei Nullstellen (bei den beiden Eigenkreisfrequenzen). Bei einem N -Massenschwinger hat sie N Nullstellen bei den N Eigenkreisfrequenzen. Wir wissen außerdem, dass die Komponenten \hat{x}_n des Lösungsvektors eines inhomogenen Gleichungssystems durch

$$\hat{x}_n = \frac{Detn}{Det} \quad (3.25)$$

angegeben werden können, wobei $Detn$ die Determinante einer Matrix ist, bei der die n -te Spalte durch den auf der rechten Seite des Gleichungssystems stehenden Spaltenvektor ersetzt

wurde, in unserem Fall also durch den Kraftamplitudenvektor. Die Nullstellen des Nenners einer Funktion bezeichnet man als die Pole der Funktion. In den Polen wächst die Funktion über alle Grenzen (nimmt den Wert ∞ an). Die Amplituden der stationären Antwortschwingungen eines ungedämpften N -Massenschwingers bei einer harmonischen Erregung haben demnach, als Funktion der Erregerfrequenz betrachtet N Pole, bei denen die Schwingungsamplituden unendlich groß werden. Die Polstellen sind die Eigenkreisfrequenzen des Mehrmassenschwingers. Beim Einmassenschwinger nannten wir der Fall, dass die Erregerfrequenz mit der Eigenfrequenz zusammenfällt, den Resonanzfall. Der Mehrmassenschwinger hat N Eigenfrequenzen und somit N Frequenzen, bei denen Resonanzfälle auftreten können. Bei stationärer harmonischer Erregung einer Maschine, zum Beispiel durch die Unwucht drehender Maschinenteile, muss sorgfältig darauf geachtet werden, dass die Drehfrequenz mit keiner der Eigenfrequenzen auch nur annähernd übereinstimmt, um unerwünscht große Resonanzschwingungen zu vermeiden. Die Rotoren großer Turbomaschinen werden beispielweise meist bei Drehzahlen betrieben, die oberhalb der durch die Biegeelastizität der Welle gegebenen kritischen Drehzahl liegen (bei der ersten Eigenfrequenz der Wellenbiegeschwingungen), aber noch deutlich unterhalb der zweiten Eigenfrequenz des Rotors. Bei vielen Maschinen kann man davon ausgehen, dass die funktionsbedingte Erregungsfunktion zwar nicht harmonisch, aber (zuminderst näherungsweise) periodisch, ist. Dies trifft z.B. für alle Maschinen zu, bei denen die gleichförmige Drehbewegung eines Antriebsmotore über Getriebe (Kurbeltrieb, Nockentrieb usw.) in ungleichförmige Bewegungen der Maschinenteile umgewandelt wird. Wenn wir uns daran erinnern, dass eine beliebige periodische Erregung mit Hilfe der Fourierreihenentwicklung stets als eine Summe harmonischer Erregungen dargestellt werden kann, die aus Anteilen in einer Grundfrequenz (entsprechend der Periode der Erregung) und deren Vielfachen, den sogenannten Harmonischen besteht, so heißt das, dass in diesem Fall das ganze Spektrum der Erregungsfunktion auf das Spektrum der Eigenfrequenzen des Mehrmassenschwingers abzustimmen ist. Die Gefahr von Resonanzerscheinungen ist weitaus größer als bei rein harmonischer Erregung.

3.2.2 Transiente Erregung

Zur Berechnung der Schwingungsantwort eines linearen Mehrmassenschwingers auf eine transiente Erregung gibt es in der Praxis zwei unterschiedliche Vorgehensweisen:

- die direkte Integration,
- die modale Zeitverlaufsberechnung.

Bei der direkten Integrationsmethode wird das Differentialgleichungssystem

$$M\ddot{x} + Kx = F(t) \quad (3.26)$$

direkt, d.h. in dieser Form (oder nach Umwandlung in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung) numerisch integriert. Das Runge-Kutta-Verfahren, das wir beim Einmassenschwinger kennengelernt haben, ist allerdings nur für Schwinger mit wenigen Freiheitsgraden geeignet. Es gehört nämlich zur Klasse der sogenannten expliziten Integrationsverfahren, bei denen sich die Funktionswerte zur Zeit $t + \Delta t$ unmittelbar in den Werten zur Zeit t ausdrücken lassen. Alle expliziten Integrationsverfahren haben die Eigenschaft, dass sie nur bedingt stabil sind. Wenn der Zeitschritt bei der numerischen Integration nicht klein genug gewählt wird, kommt es zu numerischen Instabilitäten. Die numerische Lösung weicht von Zeitschritt zu Zeitschritt immer stärker von der richtigen Lösung ab. Glücklicherweise ist das Ergebnis der Rechnung in den meisten Fällen schon nach wenigen Zeitschritten so offensichtlich falsch, dass die Instabilität erkannt wird. Häufig bricht sogar die Rechnung wegen zu großer Zahlen ab. Bei den expliziten Integrationsverfahren muss der Zeitschritt kleiner als ein Viertel der Periodendauer der größten Eigenfrequenz des Schwingers sein, damit die Rechnung stabil bleibt. Das leuchtet unmittelbar ein, wenn man bedenkt, dass nach einer Viertelperiode jeweils entweder die Schwinggeschwindigkeit oder die Schwingbeschleunigung das Vorzeichen wechseln. Wenn ein Mehrmassenschwinger sehr viele Freiheitsgrade hat (bei dynamischen FE-Modellen können das mehrere tausend werden), hat er meist auch sehr große Eigenfrequenzen. Dann sind bedingt stabile Integrationsverfahren nicht mehr praktikabel, da der Zeitschritt zu klein gewählt werden muss. Kommerzielle FE-Programmsysteme enthalten deshalb Integrationsalgorithmen, die unbedingt stabil sind, so dass die Größe des Zeitschritts problembezogen frei gewählt werden kann. Dies sind in der Regel sogenannte implizite Integrationsverfahren, bei denen der Verschiebungsvektor zur Zeit $t + \Delta t$ nicht explizit aus den Werten zu früheren Zeiten bestimmt werden kann, sondern als Lösungsvektor eines linearen Gleichungssystems ermittelt werden muss. Die bekanntesten impliziten Integrationsverfahren sind das Newmark-Verfahren und das Wilson- Θ -Verfahren. Die direkte Integration wird vor allem zur Lösung nichtlinearer Schwingungsprobleme angewandt. Bei linearen Problemen wird man sie nur anwenden, wenn die Schwingungsantwort nur für ein oder zwei relativ kurze Erregungs-Zeit-Funktionen berechnet werden soll. Trifft das nicht zu, z.B. weil für ein bestimmtes Schwingungssystem mehrere Erregungs-Zeit-Funktionen betrachtet werden müssen oder weil der Zeitverlauf relativ lang ist, lohnt es sich, eine modale Zeitverlaufsrechnung (THMA = time history modal analysis) durchzuführen. Bei diesem Verfahren werden zuerst die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren des Schwingungssystems ermittelt. Dann wird die Schwingungsgleichung einschließlich der rechten Seite durch Multiplikation mit der Matrix der Eigenvektoren in den

Modalraum transformiert, in dem die Schwingungsgleichungen entkoppelt sind. Man hat so anstelle eines N -Freiheitsgradsystems N Einmassenschwinger vorliegen, deren Schwingungsantwort viel einfacher berechnet werden kann. Durch die abschließende Rücktransformation in den Raum der Ausgangsvariablen erhält man die gesuchte Lösung des Schwingungsproblems. In der Praxis ist dieses Verfahren einfacher anzuwenden, als es bei dieser Beschreibung den Anschein hat. Da das Ergebnis der Transformation für die linke Seite des Differentialgleichung-Systems bekannt ist, braucht nur die rechte Seite (d.h. der Kraftvektor oder die Fußpunktbeschleunigung) transformiert und die Rücktransformation der Lösungen durchgeführt zu werden. Ein großer Vorteil bei der Anwendung des Verfahrens für dynamische FE-Berechnungen besteht darin, dass gar nicht alle Eigenwerte und Eigenvektoren des Schwingungssystems berechnet werden müssen. Vielmehr reicht es aus, nur diejenigen Eigenvektoren zu kennen, deren zugehörige Eigenfrequenzen im interessierenden Frequenzbereich liegen. Kommerzielle FE-Programmsysteme enthalten Eigenwertlöser, die nur die ersten m Eigenwerte und -vektoren berechnen (z.B. subspace vector iteration). Die modale Zeitverlaufsrechnung wird dann in einem Unterraum des Modalraums vorgenommen. Beispiel: Es soll das Schwingungsverhalten einer Webmaschine untersucht werden, die mit 420 Schuß / Minute arbeitet. Die Grundfrequenz der periodischen Erregung im stationären Betrieb ist folglich 7 Hz. Wegen der Ungleichförmigkeitsgetriebe sind jedoch Harmonische bis zur zwölften Ordnung zu berücksichtigen, d.h. bis zu einer Frequenz von 84 Hz. Ein FE-Modell des Rahmens aus Balken- und Plattenelementen hat aber bei einer Elementlänge von z.B. 20 cm insgesamt ca. 800 Freiheitsgrade und somit auch Ca. 800 Eigenfrequenzen, die bis in den Bereich über 10 kHz reichen. Für die Aufgabenstellung interessant sind aber nur die ersten 10 bis 15 Eigenfrequenzen im Frequenzbereich bis etwa 100 Hz.

3.3 Schwach gedämpfte Systeme

Bisher haben wir ausschließlich den (unrealistischen) Fall betrachtet, dass unser Mehrmassenschwinger ungedämpfte Schwingungen ausführt. Dafür gibt es drei gute Gründe:

- die mathematischen Zusammenhänge sind wesentlich einfacher darzustellen,
- es ist meist gar nicht möglich, zutreffende Dämpfungskonstanten für gekoppelte Systeme anzugeben.
- das ungedämpfte System unterscheidet sich bezüglich seiner Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen nur unwesentlich von einem schwach gedämpften System.

In der Praxis haben wir es sehr häufig mit schwach gedämpften Schwingungssystemen zu tun, weil beim Betrieb von Systemen mit starker Dämpfung weniger Schwingungsprobleme auftreten. Für schwach gedämpfte Systeme ist es zulässig, die Eigenfrequenzen und Eigenformen des ungedämpften Systems zu verwenden, um eine Transformation in den Modalraum durchzuführen. Im Modalraum hat jede Eigenform (Mode) ihre eigene Differentialgleichung, wie ein Einmassenschwinger. Man kann deshalb jeder Eigenform eine bestimmte modale Dämpfung zuordnen, indem man in die Differentialgleichung ein Dämpfungsglied mit dem entsprechenden Lehr'schen Dämpfungsmaß einfügt. Bezüglich der anzusetzenden modalen Dämpfungswerte ist man meist auf Annahmen angewiesen, die auf Erfahrungen mit ähnlichen Konstruktionen beruhen. In diesem Fall wird man pauschal einen Dämpfungswert für alle Eigenformen wählen. Seltener hat man Ergebnisse experimenteller Schwingungsuntersuchungen an der ausgeführten Konstruktion zur Verfügung, aus denen für jede Eigenform individuelle modale Dämpfungswerte ermittelt werden können. Für einige sicherheitsrelevante Systeme sind die für die Berechnung zu verwendenden modalen Dämpfungswerte in Regelwerken vorgeschrieben, so z.B. für Rohrleitungen und Behälter im Kernkraftwerksbereich. Mit dem modalen Dämpfungsansatz erreicht man, dass im Modalraum, in dem sowohl die Massenmatrix als auch die Steifigkeitsmatrix Diagonalform haben, die Differentialgleichungen auch des gedämpften Systems entkoppelt bleiben, was beim Ansatz einer Dämpfungsmatrix in der Schwingungsgleichung im allgemeinen nicht der Fall ist, es sei denn, man setzt proportionale Dämpfung voraus, die oft auch als Rayleigh-Dämpfung bezeichnet wird. Bei der Rayleigh-Dämpfung wird angenommen, dass die Dämpfungsmatrix sich additiv aus zwei Bestandteilen zusammensetzt, von denen einer proportional zur Massenmatrix, der andere proportional zur Steifigkeitsmatrix des Systems ist:

$$C = \alpha M + \beta K \quad (3.27)$$

Diese Dämpfungsmatrix wird durch eine Koordinatentransformation, bei der sowohl die Massenmatrix als auch die Steifigkeitsmatrix Diagonalform erhalten, ebenfalls in eine Diagonalmatrix überführt. Daß bedeutet, dass die N gekoppelten Differentialgleichungen eines Mehrmassenschwingers

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t) \quad (3.28)$$

bei Annahme proportionaler Dämpfung durch die Transformation in den Modalraum des entsprechenden ungedämpften Schwingers entkoppelt werden. Für eine Eigenform des Schwingers mit der Eigenkreisfrequenz ω_i ergibt sich bei Rayleigh-Dämpfung eine modale Dämpfung

$$D_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \quad (3.29)$$

Der massenproportionale Anteil bedingt einen hyperbolischen Verlauf der modalen Dämpfung über der Frequenz, der für die niederfrequenten Schwingungen maßgebend ist. Der steifigkeitsproportionale Anteil führt zu einem linearen Anwachsen der modalen Dämpfung mit der Frequenz und ist demnach für hohe Eigenfrequenzen dominant. Durch die Festlegung der modalen Dämpfung für zwei Moden sind die beiden Proportionalitätskonstanten des Rayleigh-Ansatzes bereits eindeutig festgelegt. Meist wird man jedoch die Konstanten so bestimmen, dass in einem bestimmten Frequenzband die modalen Dämpfungen unterhalb eines vorgegebenen Wertes bleiben. Der Rayleigh-Ansatz ist übrigens auch geeignet, um in Fällen, in denen die Schwingungsgleichung ohne vorherige Ermittlung der Eigenfrequenzen und Eigenformen durch direkte Integration gelöst werden soll, zu einer vernünftigen Dämpfungsmatrix zu kommen.

4 Schwingungen kontinuierlicher Systeme

Inhalt

4.1 Längsschwingungen einer Feder	91
4.2 Biegeschwingungen	94

Bisher haben wir schwingungsfähige Systeme betrachtet, bei denen die Masse in einem Teil der Konstruktion konzentriert ist, der sich wiederum über leichte elastische Bauteile abstützt. Das Schwingungsverhalten solcher Systeme lässt sich mit dem Modell des Einmassenschwingers beschreiben, der aus einer starren Masse und einer masselosen Feder besteht. Dieses idealisierte Modell stellt einen Grenzfall dar, der in der Realität nicht wirklich vorkommt. Der andere Grenzfall dagegen, das Modell eines Schwingers, bei dem Steifigkeit und Masse völlig gleichmäßig über das gesamte Bauteil verteilt sind, kann tatsächlich real existieren, z.B. als Stab mit konstantem Querschnitt aus homogenem Material, der Längs- oder Biegeschwingungen ausführt. Das Schwingungsverhalten solcher Kontinua soll nachfolgend an einigen Beispielen untersucht werden.

4.1 Längsschwingungen einer Feder

Wir betrachten eine Feder mit der Federkonstanten k , die spannungsfrei zwischen starren Lagern eingebaut und in Ruhe ist. Die Feder habe die Länge L und die Masse m . Wenn man irgendeine Stelle der Feder in Längsrichtung auslenkt und dann losläßt, so ist das Gleichgewicht insgesamt gestört und jedes Massenelement der Feder wird freie Längsschwingungen um seine jeweilige Gleichgewichtslage ausführen. Ein Federelement der Länge dx , das sich im Gleichgewichtszustand zur Zeit $t = 0$ an der Stelle x befindet, wird zur Zeit t (mit $t > 0$) an der Stelle $x + u(t)$ sein. Da jedes Massenelement eine unterschiedlich große Verschiebung

erfährt, ist die Verschiebung u nicht nur eine Funktion der Zeit, sondern auch des Ortes x , den ein Massenelement der Feder im Ruhezustand einnimmt:

$$u = u(x, t) \quad (4.1)$$

Wenn in der Feder kein Gleichgewichtszustand vorliegt, kann man auch nicht mehr davon ausgehen, dass die Federkraft längs der Feder überall gleich groß ist, sondern auch die Federkraft ist eine Funktion von Zeit und Ort:

$$F = F(x, t) \quad (4.2)$$

Wir bezeichnen die auf die Längeneinheit bezogene Federmasse als spezifische Federmasse μ , setzen also

$$\mu = \frac{m}{L} \quad (4.3)$$

und definieren eine Federsteifigkeit κ als Produkt aus der Federkonstante k und der Federlänge L :

$$\kappa = kL \quad (4.4)$$

Die Federsteifigkeit hat die Dimension einer Kraft. Es ist diejenige Kraft, die erforderlich ist, um die Feder auf die doppelte Länge auszuziehen, das heißt um eine Federdehnung (relative Längenänderung) vom Betrag 1 zu erreichen, da zwischen Federkraft und Federsteifigkeit der Zusammenhang

$$F = k\Delta L = kL \frac{\Delta L}{L} = \kappa \varepsilon \quad (4.5)$$

besteht. Die Dehnung des betrachteten Federelements der Länge dx wird zur Zeit t

$$\varepsilon = \frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.6)$$

Die von einem Element übertragene Federkraft ist der Dehnung proportional:

$$F(x, t) = \kappa \varepsilon(x, t) = \kappa \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.7)$$

Die auf unser Element wirkende resultierende Kraft ist folglich

$$\Delta F = F(x + dx, t) - F(x, t) \quad (4.8)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x} dx \quad (4.9)$$

$$= \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad (4.10)$$

Der Impulssatz für ein Federelement der Masse

$$\Delta m = \mu dx \quad (4.11)$$

lautet dann:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad (4.12)$$

oder

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.13)$$

mit der Abkürzung $c^2 = \frac{\kappa}{\mu}$. Diese partielle Differentialgleichung 2. Ordnung wird als ein-dimensionale Wellengleichung bezeichnet. Nach einer Störung des Gleichgewichts der Feder laufen Wellen nach beiden Seiten von der Störstelle weg. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Wellen ist gleich c . Die Wellen werden an den Federenden reflektiert und, nach einigen solchen Reflektionen, bildet sich eine stehende Welle aus, bei der jeder Massenpunkt eine Schwingung um seine Gleichgewichtslage ausführt, deren Amplitude ausschließlich eine Funktion des Ortes ist. Wenn wir uns für diese Schwingungen interessieren, müssen wir Lösungen der Differentialgleichung suchen, die sich als Produkt aus einer reinen Zeitfunktion und einer reinen Ortsfunktion darstellen lassen:

$$u(t) = v(t)w(x) \quad (4.14)$$

Mit diesem Ansatz wird aus der partiellen Differentialgleichung

$$\ddot{v}(t)w(x) = c^2 v(t)\ddot{w}(x) \quad (4.15)$$

$$\frac{\ddot{v}(t)}{v(t)} = c^2 \frac{\ddot{w}(x)}{w(x)} \quad (4.16)$$

Links vom Gleichheitszeichen steht eine reine Zeitfunktion, rechts davon eine reine Ortsfunktion. Wenn die Gleichung erfüllt sein soll, müssen folglich beide Seiten konstant sein:

$$\frac{\ddot{v}(t)}{v(t)} = c^2 \frac{\ddot{w}(x)}{w(x)} = \text{const} = -\omega^2 \quad (4.17)$$

Auf diese Weise erhalten wir mit dem Produktansatz für stehende Wellen aus einer partiellen Differentialgleichung zwei gewöhnliche Differentialgleichungen. Die 1. Differentialgleichung für die Zeitfunktion der Schwingungen eines Federelements um seine Gleichgewichtslage ist die bekannte Schwingungsgleichung des Einmassenschwingers:

$$\ddot{v}(t) + \omega^2 v(t) = 0 \quad (4.18)$$

Die 2. Differentialgleichung für die Ortsfunktion der Amplituden dieser Schwingungen, die sogenannte Eigenschwingungsform, hat genau die gleiche Bauart:

$$\ddot{w}(x) + \frac{\omega^2}{c^2}w(x) = 0 \quad (4.19)$$

Ihre allgemeine Lösung lautet:

$$w(x) = A \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad (4.20)$$

Bei den im Beispiel vorliegenden Randbedingungen $w(0) = w(L) = 0$ folgt, dass nur für gewisse Werte von ω nichttriviale Lösungen existieren:

$$\omega_n = n\pi \frac{c}{L} \quad \text{und} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.21)$$

Diese Werte sind die Eigenkreisfrequenzen der Federschwingungen. Die zugehörigen Lösungsfunktionen

$$w_n(x) = A_n \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) \quad \text{und} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.22)$$

nennt man deren Eigenschwingungsformen. Ein Schwingungssystem mit kontinuierlicher Verteilung von Masse und Steifigkeit hat also unendlich viele Eigenfrequenzen, denen jeweils eine bestimmte Schwingungsform des Systems zugeordnet ist, die aber zunächst nur bis auf den Wert A_n bestimmt ist. Dieser Wert ist keine Systemkenngröße, sondern hängt vom Ort, von der Art und von der Größe der Gleichgewichtsstörung ab, die zur Zeit $t = 0$ eingebracht wird. Genauer gesagt: Der relative Anteil der einzelnen Schwingungsformen an der Gesamtschwingung hängt vor allem vom Anregungsort und vom Spektrum der Anregungs-Zeit-Funktion ab, die Schwingstärke zusätzlich von der absoluten Größe der Störung.

4.2 Biegeschwingungen

Aus der Festigkeitslehre ist die Differentialgleichung für die Biegelinie eines Balkens mit konstantem Querschnitt unter ruhender Belastung bekannt:

$$EI_y \ddot{z}(x) = -M_{by}(x) \quad (4.23)$$

Bei Belastung des Balkens durch eine Streckenlast $q(x)$ lässt sich die Biegegleichung in der Form

$$EI_y \ddot{z}(x) = q(x) \quad (4.24)$$

angeben. Führt ein Biegebalken nach einer Störung seines Gleichgewichtszustandes freie Schwingungen aus, so ist die Durchbiegung z nicht nur eine Funktion des Ortes sondern auch der Zeit: $z = z(x, t)$. Auf ein Balkenelement der Länge dx an der Stelle x wirkt bei einer Bewegung die d'Alembertsche Trägheitskraft, die der Beschleunigung proportional und ihr entgegen gerichtet ist. Der Balken erfährt also bei seiner Schwingbewegung eine dynamische Streckenlast

$$q(x, t) = -\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (4.25)$$

Für die freien Biegeschwingungen eines Balkens mit konstantem Querschnitt ergibt sich folglich eine partielle Differentialgleichung 4. Ordnung:

$$EI_y \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = -\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (4.26)$$

Wir suchen wieder nur Lösungen der Form $z(x, t) = v(t)w(x)$, das heißt Schwingungen, bei denen eine bestimmte Biegeform (Eigenform) vorliegt, in der der Balken insgesamt eine Schwingbewegung durchführt. Durch diesen Produktansatz erhalten wir, genau wie in vorigen Kapitel, aus der partiellen Differentialgleichung zwei gewöhnliche Differentialgleichungen. Die 1. Differentialgleichung für die Zeitfunktion $v(t)$ lautet wieder

$$\ddot{v}(t) = \omega^2 v(t) = 0 \quad (4.27)$$

Die 2. Differentialgleichung für die Eigenschwingungsformen ist hier eine Differentialgleichung 4. Ordnung:

$$\ddot{w}(x) - \frac{\omega^2}{c^2} w(x) = 0 \quad (4.28)$$

mit der Abkürzung $c^2 = \frac{EI_y}{\mu}$ Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung kann in der Form

$$w(x) = A \sin\left(\frac{\lambda x}{L}\right) + B \cos\left(\frac{\lambda x}{L}\right) + C \sinh\left(\frac{\lambda x}{L}\right) + D \cosh\left(\frac{\lambda x}{L}\right) \quad (4.29)$$

angegeben werden, wobei $\lambda = L\sqrt{\frac{\omega}{c}}$ sein muss und L eine beliebige Bezugslänge ist, die wir im Allgemeinen gleich der Balkenlänge oder, bei zweifach gelagerten Balken, gleich dem Lagerabstand wählen. Die speziellen Lösungen (die Eigenschwingungsformen mit den zugehörigen Eigenkreisfrequenzen) hängen logischerweise von den Randbedingungen für die Biegelinie, d.h. von den Lagerbedingungen des Balkens ab. Bei einer Differentialgleichung 4. Ordnung sind insgesamt 4 Bedingungen erforderlich. Für einen Freiträger der Länge L , der bei $x = 0$ fest eingespannt ist, gilt: bei $x = 0$: $w(0) = \dot{w}(0) = 0$ und bei $x = L$: $\ddot{w}(L) = \ddot{w}(L) = 0$.

Die beiden letzten Gleichungen lassen sich aus den Bedingungen ableiten, dass am freien Bal-
kenende das Biegemoment und die Querkraft null sein müssen. Aus den Randbedingungen für
die Stelle $x = 0$ ergibt sich, dass $C = -A$ und $D = -B$ sein muss. Damit führen die
Randbedingungen für $x = L$ auf das folgende homogene lineare Gleichungssystem für A und
 B :

$$A(\sin \lambda + \sinh \lambda) + B(\cos \lambda + \cosh \lambda) = 0 \quad (4.30)$$

$$-A(\cos \lambda + \cosh \lambda) + B(\sin \lambda - \sinh \lambda) = 0 \quad (4.31)$$

Dieses Gleichungssystem hat nur dann nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante der Ko-
effizienten verschwindet. Dies ist dann der Fall, wenn keine Lösung der transzendenten Glei-
chung $\cos \lambda = -\frac{1}{\cosh \lambda}$ ist. An Hand eines Diagramms, in dem man die beiden links und rechts
des Gleichheitszeichens stehenden Funktionen qualitativ richtig einträgt, lässt sich erkennen,
dass es ∞ viele Lösungen dieser Gleichung gibt, die sich für große Werte der Variablen nur
wenig von den Nullstellen der Kosinusfunktion unterscheiden. Eine exakte, analytische Lösung
der Gleichung ist aber nicht möglich, sondern die Nullstellen der Determinante, die Eigenwer-
te, müssen numerisch ermittelt werden. Auf 4 Stellen nach dem Komma gerundet, ergeben sich
die Eigenwerte zu:

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2} + 0,3043 = 1,8751 \quad (4.32)$$

$$\lambda_2 = \frac{3\pi}{2} - 0,0183 = 4,6941 \quad (4.33)$$

$$\lambda_3 = \frac{5\pi}{2} + 0,0008 = 7,8548 \quad (4.34)$$

$$\lambda_n = (2n - 1)\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad n \rightarrow \infty \quad (4.35)$$

Zu jedem dieser Eigenwerte existieren Lösungen der Differentialgleichung für die Ortsfunk-
tion des Produktansatzes. die Eigenschwingungsformen (modes of vibration) des Freiträgers
die aber, als Lösung einer homogenen Gleichung, nur bis auf einen konstanten Faktor, die
Schwingungsamplitude, bestimmt sind. Die zugehörigen Eigenkreisfrequenzen, mit denen die
Schwingungen ablaufen, ergeben sich zu

$$\omega_n = \left(\frac{\lambda_n}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad \text{und} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.36)$$

Wie bei den Federschwingungen hängt auch hier der relative Anteil der einzelnen Eigenschwin-
gungsformen an der Gesamtschwingung des Trägers vom Anregungsort und vom Spektrum der
Erregerfunktion ab, die Schwingstärke zusätzlich noch von der Größe der Erregung. Bei einem

beidseitig gelenkig gelagerten Träger der Länge L mit konstantem Querschnitt ist die Bestimmung der Eigenwerte wesentlich einfacher, da die in diesem Fall geltenden Randbedingungen $w(0) = w(L) = 0$, $\ddot{w}(0) = \ddot{w}(L) = 0$ über die Bedingungen $B = C = D = 0$ auf die Eigenwertgleichung $\sinh \lambda = 0$ führt, deren Lösungen $\lambda_n = n\pi$ und $n = 1, 2, 3, \dots$ sind. Die Eigenkreisfrequenzen werden in diesem Lagerungsfall

$$\omega_n = \left(n \frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad \text{und} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.37)$$

und die Eigenschwingungsformen sind reine Sinusfunktionen:

$$w_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{und} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.38)$$

Generell hat die erste Eigenform der Biegeschwingungen nur die durch die Auflagerbedingungen vorgeschriebene Zahl von Schwingungsknoten, d.h. von Orten, die bei der Schwingung in Ruhe bleiben. Die folgende Eigenform hat immer einen Knoten mehr als die vorhergehende.

Anhang: Kontrollfragen

Einführung

1. Welche Bewegungsvorgänge nennt man Schwingungen?
2. Wann ist eine Konstruktion ein schwingungsfähiges Gebilde?
3. Wodurch kommt eine einmal angestoßene Schwingung zur Ruhe?
4. Nennen Sie die Newton'schen Gesetze der Dynamik!
5. Wie bezeichnet man die Newton'sche Bewegungsgröße heute?
6. Schreiben Sie das Newton'sche Bewegungsgesetz für einen punktförmigen Körper konstanter Masse als Formel!
7. Für welchen Punkt eines starren Körpers gilt das Bewegungsgesetz in der gleichen Form wie für punktförmige Körper?
8. Was versteht man unter Drehmasse und Drehimpuls?
9. Wie lautet der Drallsatz für die ebene Bewegung des starren Körpers?
10. Was versteht man unter einem Freiheitsgrad der Bewegung?
11. Wie viele Freiheitsgrade der Bewegung hat ein starrer Körper bei räumlicher Bewegung und bei ebener Bewegung?

Schwinger mit einem Freiheitsgrad

Freie Schwingung des ungedämpften Systems

1. Hat die Schwerkraft über die Schwingungsrichtung (horizontal, vertikal) einen Einfluss auf die Schwingungsdauer eines ungedämpften Feder-Masse-Systems?

2. Von welchen Größen hängt die Schwingungsdauer eines Fadenpendels ab?

Freie gedämpfte Schwingung

1. Was versteht man unter dem Begriff Dämpfung?
2. Welche physikalischen Phänomene können mechanische Schwingungen dämpfen?
3. Gibt es in der Realität ungedämpfte Schwingungen?
4. Was bedeutet das Wort Energiedissipation?
5. Welche Annahmen über die Reibkraft werden im Coulomb'schen Modell der trockenen Reibung getroffen?
6. Welchen Einfluss hat die Reibungsdämpfung auf die Eigenfrequenz eines Feder-Masse-Systems?
7. Zeichnen Sie qualitativ richtig den Zeitverlauf des Schwingwegs eines reibungsgedämpften Schwingers nach Auslenkung und loslassen aus der Ruhe!
8. Was versteht man unter dem Begriff „Viskosität“?
9. Von welchen Größen hängt die Dämpferkraft beim Modell der linearen, viskosen Dämpfung ab?
10. Wie ist das Lehr'sche Dämpfungsmaß D definiert?
11. Für welchen Wertebereich von D treten gedämpfte Schwingungen auf? Was passiert für D -Werte außerhalb dieses Bereichs?
12. Wann spricht man von einem schwach gedämpften System?
13. Zeichnen Sie qualitativ richtig den Zeitverlauf des Schwingwegs eines viskos gedämpften Schwingers nach Auslenkung und loslassen aus der Ruhe!
14. Was ist die Abklingrate einer Schwingung?
15. Wie lässt sich aus Schwingweg- oder Beschleunigungsmessungen beim Rückschnellversuch die Dämpfung des Schwingers ermitteln?

Harmonische Erregung

1. Was versteht man unter harmonischer Erregung eines Schwingers?
2. Was bezeichnet man als Vergrößerungsfunktion der erzwungenen Schwingungen?
3. Was ist der Grund für diese Bezeichnung?
4. Wie ist das Frequenzverhältnis η definiert?
5. Zeichnen Sie qualitativ richtig den Verlauf der Vergrößerungsfunktion (Betrag und Phase) für den Schwingweg des ungedämpften und des viskos gedämpften Einmassenschwingers bei Krafterregung!
6. Was versteht man unter Unwuchterregung und in welchen Fällen tritt sie in der Praxis auf?
7. Zeichnen Sie qualitativ richtig den Verlauf der Vergrößerungsfunktion (Betrag und Phase) für den Schwingweg des viskos gedämpften Einmassenschwingers bei Unwuchterregung!
8. Was versteht man unter Fußpunkterregung und in welchen Fällen tritt sie in der Praxis auf?

Allgemeine periodische Erregung

1. Wie lässt sich eine periodische Funktion charakterisieren?
2. Wie hängen die Frequenzen der Glieder der Fourierreihe einer periodischen Funktion von der Periode ab?
3. Was versteht man unter dem Amplituden- und dem Phasenspektrum einer periodischen Funktion?
4. Wie lässt sich mit Hilfe der Fourierreihe die Aufgabe, die Schwingungsantwort bei allgemeiner periodischer Erregung zu ermitteln, auf den Fall der harmonischen Erregung zurückführen?

Stoßantwort

1. Wann spricht man von einer Stoßanregung?
2. Was bedeutet der Begriff Kraftstoß?
3. Wie lässt sich die Wirkung eines Stoßes, dessen Dauer sehr kurz im Vergleich zur Schwingungsdauer des Einmassenschwingers ist, beschreiben? Spielt dabei der genaue zeitliche Verlauf der Kraft eine Rolle?
4. Was ist ein Dirac-Stoß? Skizzieren Sie den Zeitverlauf des Schwingwegs nach einem Dirac-Stoß.
5. Wie sieht das Amplitudenspektrum eines Dirac-Stoßes aus? Welche Folgerungen lassen sich daraus in Bezug auf Stoßvorgänge in Maschinen bzw. in Bezug auf experimentelle Schwingungsuntersuchungen ziehen?

Beliebige Erregung

1. Erklären Sie die Begriffe „stationär“, „instationär“, „transient“, „deterministisch“ und „stochastisch“!
2. Durch welche Transformation wird ein Schwingungsproblem vom Zeitbereich in den Frequenzbereich überführt? Welche Vorteile bringt diese Transformation?
3. Was versteht man unter der Übertragungsfunktion eines linearen Systems?
4. Was versteht man unter dem komplexen Frequenzgang eines Schwingers?
5. Zeichnen Sie qualitativ richtig den Verlauf von Realteil und Imaginärteil des komplexen Frequenzgangs eines schwach gedämpften Einmassenschwingers!
6. Wie sieht das Nyquist-Diagramm des Einmassenschwingers aus?

Systeme mit zwei und mehr Freiheitsgraden

Freie Schwingungen des ungedämpften Systems

1. Unter welcher Bedingung hat ein homogenes, lineares Gleichungssystem nichttriviale Lösungen?

2. Was versteht man unter einer Eigenschwingungsform und unter einem Eigenvektor eines Schwingungssystems?
3. Welche Eigenschaften besitzen die Eigenvektoren eines Schwingungssystems?

Erzwungene Schwingungen beim ungedämpften System

1. Zeichnen Sie qualitativ richtig den Verlauf der Vergrößerungsfunktionen eines ungedämpften Zweimassenschwingers bei harmonischer Krafterregung einer der beiden Massen!
2. Was ist der Modalraum eines Schwingungssystems und wodurch zeichnen sich die Bewegungsgleichungen nach der Transformation in den Modalraum aus?
3. Wann lässt sich ein Schwingungsproblem durch Transformation in den Modalraum lösen?

Erzwungene Schwingungen bei schwach gedämpften Systemen

1. Welche beiden Möglichkeiten zur Berücksichtigung der Dämpfung bei Mehr-Freiheitsgrad-Systemen werden in der Praxis verwendet?
2. Welche Vorteile bietet die modale Zeitverlaufsrechnung (THMA) bei Systemen mit sehr vielen Freiheitsgraden, z.B. bei FE-Modellen?
3. Lässt sich die THMA auch bei nichtlinearen oder stark gedämpften Systemen anwenden?

Schwingungen kontinuierlicher Systeme

1. Was sind stehende Wellen?
2. Erklären Sie die Begriffe „Eigenschwingungsform“, „Schwingungsknoten“ und „Schwingungsbauch“!
3. Skizzieren Sie die ersten drei Eigenschwingungsformen
 - eines Freitragers (einseitig eingespannter Balken)
 - eines beidseitig aufgelegten Trägers!

Literaturhinweise

- [1] *K.-H. Grote, J. Feldhusen (Hrsg.):* Dubbel - Taschenbuch für den Maschinenbau; Kapitel B.4 „Schwingungslehre“ und Kapitel O.2 „Maschinendynamik, Schwingungen“. Springer Verlag, 22. Auflage, 2007.
- [2] *D. Gross, W. Hauger, J. Schröder, W.A. Wall:* Technische Mechanik, Band 3: Kinetik; Kapitel 5: Schwingungen. Springer Verlag, 10. Auflage, 2008.
- [3] *K. Magnus, K. Popp:* Schwingungen. Teubner Verlag, 8. Auflage, 2008.
- [4] *R.E.D. Bishop:* Schwingungen in Natur und Technik. Teubner Verlag, 2. Auflage, 1985.